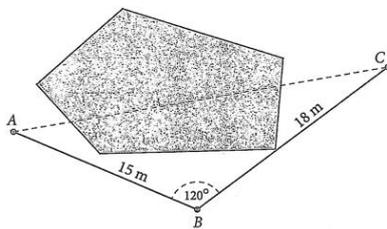
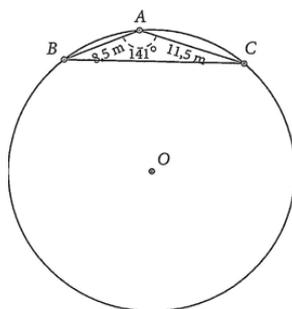


Câu 1. Để kéo dây điện từ cột điện vào nhà phải qua một cái ao, anh Nam không thể đo độ dài dây điện cần mua trực tiếp được nên đã làm như sau: Lấy một điểm B như trong hình, người ta đo được độ dài từ B đến A (nhà) là $15m$, từ B đến C (cột điện) là $18m$ và $\angle ABC = 120^\circ$. Hãy tính độ dài dây điện nối từ nhà ra đến cột điện.



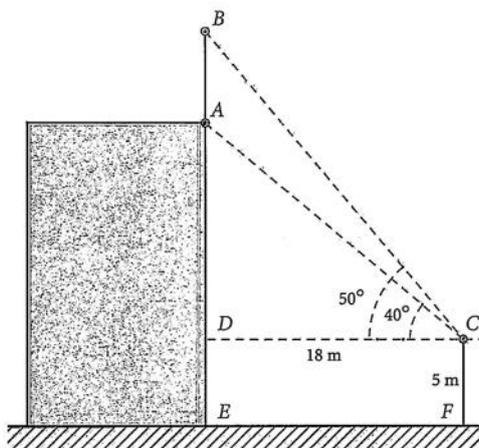
Trả lời:.....

Câu 2. Để đo đường kính một hồ hình tròn, người ta làm như sau: Lấy ba điểm A, B, C như hình vẽ, sao cho $AB = 8,5m$; $AC = 11,5m$; $\angle BAC = 141^\circ$. Hãy tính đường kính của hồ nước đó.



Trả lời:.....

Câu 3. Để đo chiều cao của một cột cờ trên đỉnh một toà nhà anh Bắc đã làm như sau: Anh đứng trên một đài quan sát có tầm quan sát cao $5m$ so với mặt đất, khi quan sát anh đo được góc quan sát chân cột là 40° và góc quan sát đỉnh cột là 50° , khoảng cách từ chân toà nhà đến vị trí quan sát là $18m$. Tính chiều cao cột cờ và chiều cao của toà nhà.



Trả lời:.....

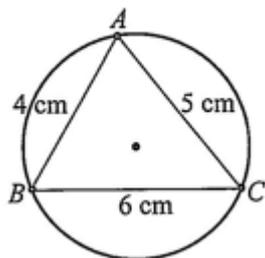
Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$ và $AB = 5, AD = 8$. Tính độ dài đường chéo AC .

Trả lời:.....

Câu 5. Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8, \hat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

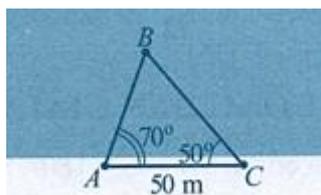
Trả lời:.....

Câu 6. Từ một miếng bìa hình tròn, bạn Nam cắt ra một hình tam giác ABC có độ dài các cạnh $AB = 4\text{ cm}, AC = 5\text{ cm}, BC = 6\text{ cm}$ (Hình). Tính bán kính R của miếng bìa ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị xăng-ti-mét)



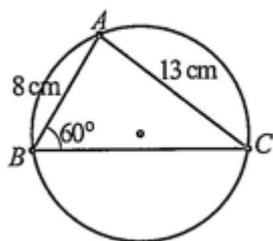
Trả lời:.....

Câu 7. Để đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ sông đến vị trí B của con tàu bị mắc cạn gần một cù lao giữa sông, bạn Minh đi dọc bờ sông từ vị trí A đến vị trí C cách A một khoảng bằng 50 m và đo các góc $BAC = 70^\circ, BCA = 50^\circ$. (Hình). Tính khoảng cách AB theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



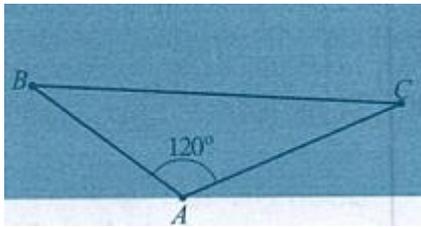
Trả lời:.....

Câu 8. Từ một tấm bìa hình tròn, bạn Thảo cắt ra một hình tam giác có các cạnh $AB = 8\text{ cm}, AC = 13\text{ cm}$ và $\hat{B} = 60^\circ$ (Hình). Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của miếng bìa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị xăng-ti-mét).



Trả lời:.....

Câu 9. Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến A và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc 120° (Hình). Tàu thứ nhất đi với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai đi với tốc độ 10 hải lí một giờ. Hỏi sau bao lâu thì khoảng cách giữa hai tàu là 60 hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị giờ)?

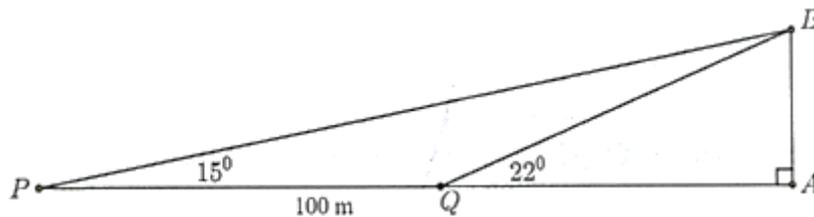


Trả lời:.....

Câu 10. Cho tam giác ABC có $a = 7\text{ cm}, b = 8, c = 6\text{ cm}$. Hãy tính độ dài đường trung tuyến m_a của tam giác đã cho.?

Trả lời:.....

Câu 11. Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 100 m . Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ra nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $BPA = 15^\circ$ và $BQA = 22^\circ$. Tính chiều cao AB của tháp?



Trả lời:.....

Câu 12. Biết hai lực cùng tác động vào một vật tạo với nhau góc 40° . Cường độ của hai lực đó là 3 N và 4 N . Tính cường độ của lực tổng hợp?

Trả lời:.....

Câu 13. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $4m_a^2 = b^2 + c^2$, trong đó m_a là độ dài trung tuyến tam giác kẻ từ $A; a, b, c$ là các cạnh của tam giác. Khi đó tam giác ABC là tam giác gì?

Trả lời:.....

Câu 14. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} = \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_c}{h_b} + \frac{h_a}{h_c}$. Khi đó tam giác ABC là tam giác gì?

Trả lời:.....

Câu 15. Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 10$ và đường trung tuyến $AM = 6$. Tính độ dài cạnh BC ?

Trả lời:.....

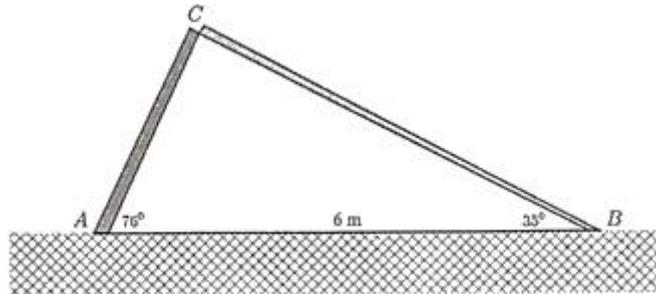
Câu 16. Cho tam giác cân ABC có $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = AC = a$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{2BC}{5}$. Tính độ dài AM ?

Trả lời:.....

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4, BC = 5, BD = 7$. Tính AC .

Trả lời:.....

Câu 18. Một cái cây dạng thẳng đứng bị gió mạnh làm gãy không hoàn toàn (hai đoạn thân bị gãy vẫn dính liền nhau như hình vẽ). Một người muốn đo chiều cao của cây trước khi gãy, người ấy đó được đoạn thẳng nối từ gốc cây đến ngọn cây (đã ngã) là $AB = 6m$, hai góc $CAB = 76^\circ, CBA = 35^\circ$. Tính chiều dài của cây trước khi bị gãy (giả sử sự biến dạng lúc gãy không ảnh hưởng đến tổng độ dài của cây)?



Trả lời:.....

Câu 19. Cho tam giác ABC thỏa mãn $h_a = \sqrt{p(p-a)}$, trong đó a, b, c là ba cạnh, h_a là chiều cao ứng với cạnh a của tam giác và p là nửa chu vi tam giác đó. Tam giác ABC là tam giác gì?

Trả lời:.....

Câu 20. Cho ΔABC có $AB = 9, BC = 10, AC = \sqrt{73}$. Kéo dài BC một đoạn $CI = 5$. Tính độ dài AI

Trả lời:.....

Câu 21. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a . Góc $BAD = 30^\circ$. Tính diện tích hình thoi $ABCD$.

Trả lời:.....

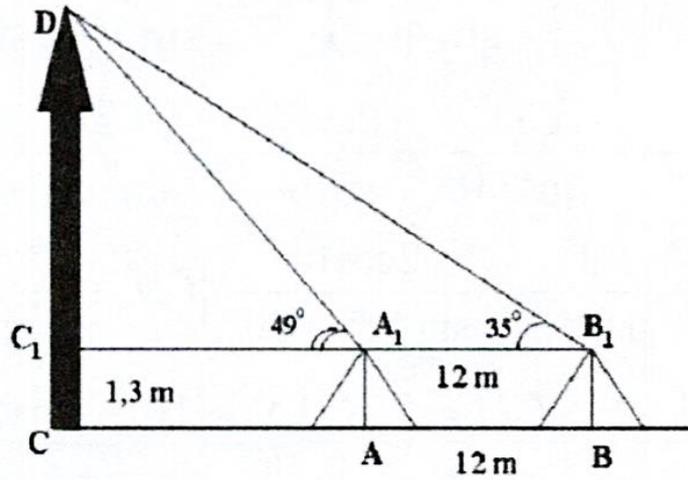
Câu 22. Cho tam giác ABC , có $AB = 8, AC = 9, BC = 10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = 7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Trả lời:.....

Câu 23. Cho tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 6cm, AC = 8cm$ và M là trung điểm của BC . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM

Trả lời:.....

Câu 24. Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12m$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3m$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $DA_1C_1 = 49^\circ$ và $DB_1C_1 = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp.



Trả lời:.....

Câu 25. Cho ΔABC có $AB = 8, AC = 5, \angle BAC = 60^\circ$. Tính chiều cao AH của ΔABC

Trả lời:.....

Câu 26. Cho ΔABC có $BC = a; AC = b$. ΔABC có diện tích lớn nhất khi $\hat{C} = ?$

Trả lời:.....

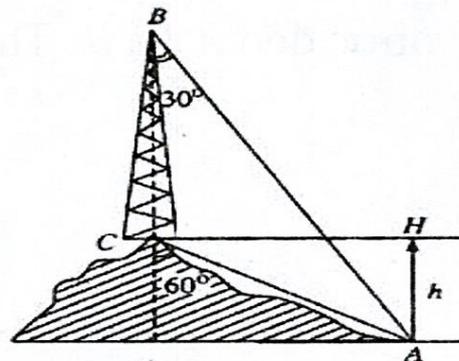
Câu 27. Cho tam giác nhọn ABC có $a = 3, b = 4$ và diện tích $S = 3\sqrt{3}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó..

Trả lời:.....

Câu 28. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

Trả lời:.....

Câu 29. Trên ngọn đồi có một cái tháp cao $100m$ (hình vẽ). Đỉnh tháp B và chân tháp C lần lượt nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 30° và 60° so với phương thẳng đứng. Tính chiều cao AH của ngọn đồi.

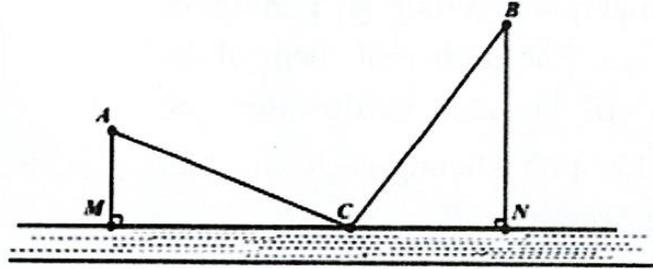


Trả lời:.....

Câu 30. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $20km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $30km/h$. Hỏi sau 3 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km?

Trả lời:.....

Câu 31. Thành phố Hải Đông dự định xây dựng một trạm nước sạch để cung cấp cho hai khu dân cư A và B . Trạm nước sạch đặt tại vị trí C trên bờ sông. Biết $AB = 3\sqrt{17} \text{ km}$, khoảng cách từ A và B đến bờ sông lần lượt là $AM = 3 \text{ km}$, $BN = 6 \text{ km}$ (hình vẽ). Gọi T là tổng độ dài đường ống từ trạm nước đến A và B . Tìm giá trị nhỏ nhất của T .



Trả lời:.....

Câu 32. Tam giác ABC có $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}$, $AC = 4$, $BC = 5$. Tính cạnh AB .

Trả lời:.....

Câu 33. Tam giác có ba cạnh lần lượt là $5, 12, 13$. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất.

Trả lời:.....

Câu 34. Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

Trả lời:.....

Câu 35. Tính góc C của tam giác ABC biết $a \neq b$ và $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2)$.

Trả lời:.....

Câu 36. Cho tam giác ABC , các đường cao h_a, h_b, h_c thỏa mãn hệ thức $3h_a = 2h_b + h_c$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c .

Trả lời:.....

Câu 37. Cho tam giác ABC có $\frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}$ và $a = 10$. Tính chu vi tam giác đó.

Trả lời:.....

Câu 38. Hình bình hành có một cạnh là 4 hai đường chéo là 6 và 8 . Tính độ dài cạnh kề với cạnh có độ dài bằng 4 .

Trả lời:.....

Câu 39. Tam giác ABC có $AB = 1, AC = 3, A = 60^\circ$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Trả lời:.....

Câu 40. Cho tam giác ABC nhọn có $BC = 3a$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc A .

Trả lời:.....

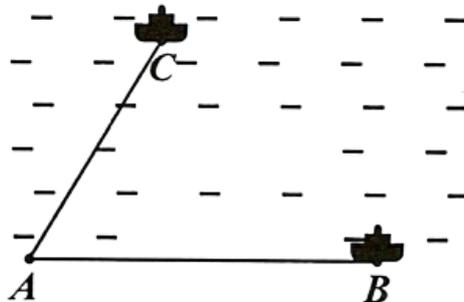
Câu 41. Cho tam giác ABC nhọn thỏa mãn $2a \sin B = b\sqrt{3}$. Tính số đo góc A .

Trả lời:.....

Câu 42. Cho tam giác ABC có góc $A = 30^\circ$, góc $B = 45^\circ$. Tính $\frac{h_a}{h_b}$.

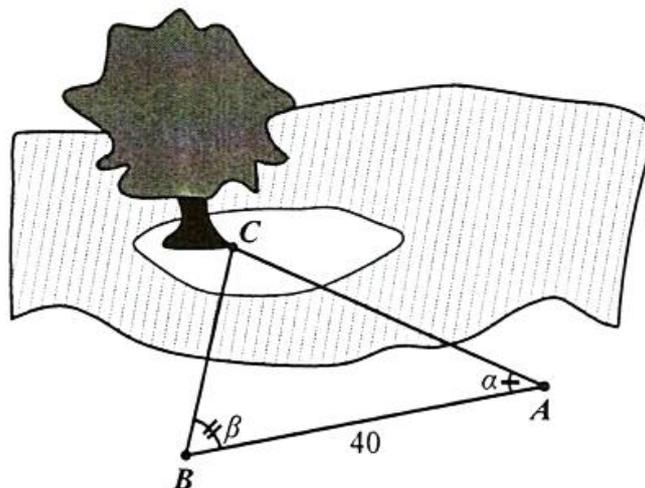
Trả lời:.....

Câu 43. Hai chiếc tàu thuyền cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?



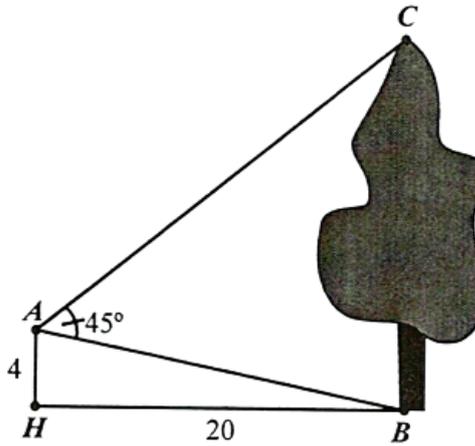
Trả lời:.....

Câu 44. Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40m$, $CAB = 45^\circ$, $CBA = 70^\circ$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán khoảng cách AC bằng bao nhiêu mét?



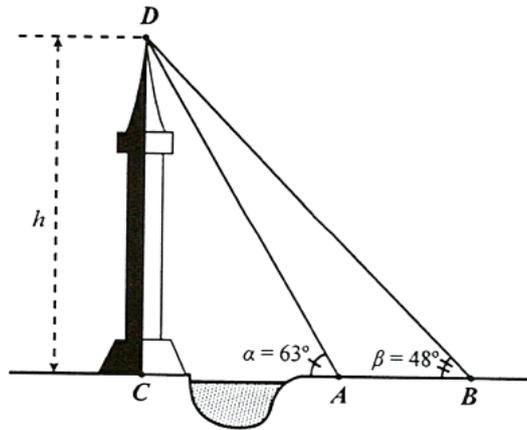
Trả lời:.....

Câu 45. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết $AH = 4m$, $HB = 20m$, $BAC = 45^\circ$. Tính chiều cao của cây?



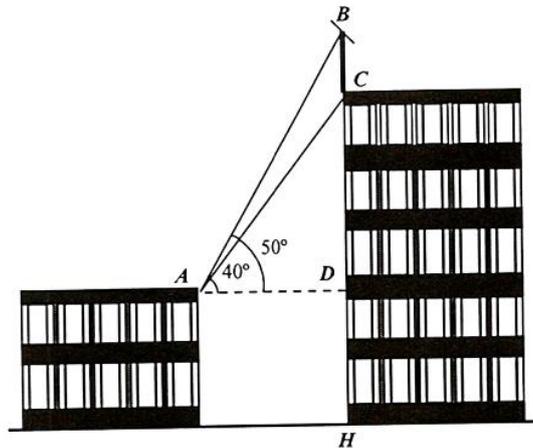
Trả lời:.....

Câu 46. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24m$, $CAD = 63^\circ$, $CBD = 48^\circ$. Tính chiều cao h của tháp?



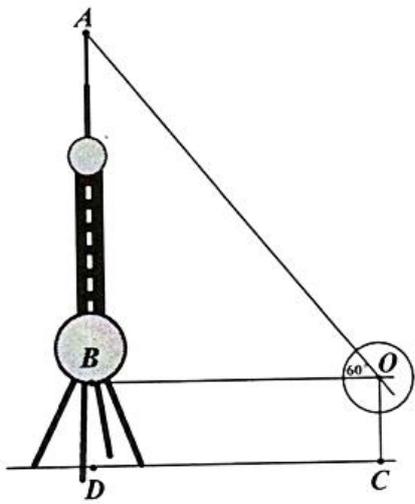
Trả lời:.....

Câu 47. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao $5m$. Từ vị trí quan sát A cao $7m$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà?



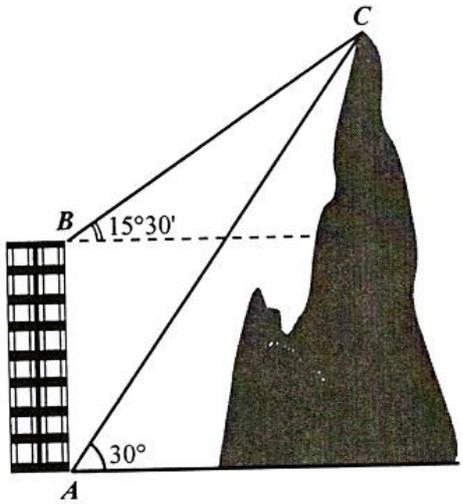
Trả lời:.....

Câu 48. Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60m$, biết chiều cao của giác kế là $OC = 1m$. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $AOB = 60^\circ$. Tính chiều cao của ngọn tháp?



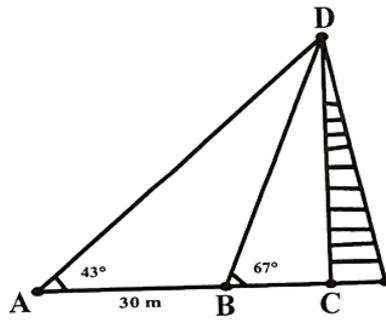
Trả lời:.....

Câu 49. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70m$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất là bao nhiêu mét?



Trả lời:.....

Câu 50. Giả sử chúng ta cần đo chiều cao CD của một cái tháp với C là chân tháp, D là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp được nên từ hai điểm A, B có khoảng cách $AB = 30m$ sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, người ta đo được các góc $CAD = 43^\circ$, $CBD = 67^\circ$ (như hình vẽ trên). Hãy tính chiều cao CD của tháp?

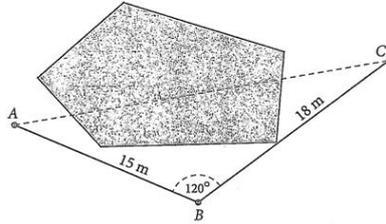


Trả lời:.....

LỜI GIẢI

Câu 1. Để kéo dây điện từ cột điện vào nhà phải qua một cái ao, anh Nam không thể đo độ dài dây điện cần mua trực tiếp được nên đã làm như sau: Lấy một điểm B như trong hình, người ta đo được độ dài từ B đến A (nhà) là $15m$, từ B đến C (cột điện) là $18m$ và $ABC = 120^\circ$. Hãy tính độ dài dây điện nối từ nhà ra đến cột điện.

Trả lời: $28,62m$.



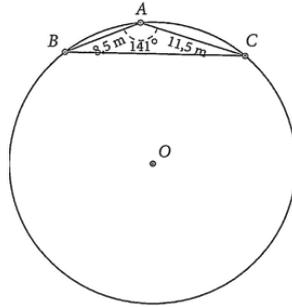
Lời giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B} = \sqrt{15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cdot \cos 120^\circ} \approx 28,62(m).$$

Vậy độ dài dây điện nối từ nhà ra cột điện dài $28,62m$.

Câu 2. Để đo đường kính một hồ hình tròn, người ta làm như sau: Lấy ba điểm A, B, C như hình vẽ, sao cho $AB = 8,5m$; $AC = 11,5m$; $BAC = 141^\circ$. Hãy tính đường kính của hồ nước đó.



Trả lời: $30m$.

Lời giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

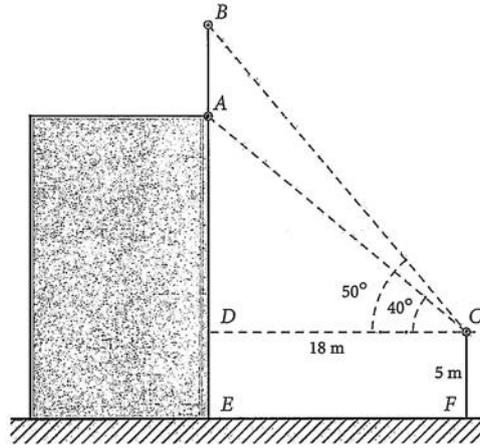
$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{8,5^2 + 11,5^2 - 2 \cdot 8,5 \cdot 11,5 \cdot \cos 141^\circ} \approx 18,88(m).$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} \approx \frac{18,88}{2 \cdot \sin 141^\circ} \approx 15(m).$$

Do đó, $d = 2R \approx 15 \cdot 2 = 30(m)$.

Vậy đường kính của hồ nước khoảng $30m$.

Câu 3. Để đo chiều cao của một cột cờ trên đỉnh một toà nhà anh Bắc đã làm như sau: Anh đứng trên một đài quan sát có tầm quan sát cao $5m$ so với mặt đất, khi quan sát anh đo được góc quan sát chân cột là 40° và góc quan sát đỉnh cột là 50° , khoảng cách từ chân toà nhà đến vị trí quan sát là $18m$. Tính chiều cao cột cờ và chiều cao của toà nhà.



Trả lời: khoảng 6,34 m.

Lời giải

Trong tam giác DAC , ta có:

$$\cos ACD = \frac{DC}{AC}, \text{ suy ra } AC = \frac{DC}{\cos A} = \frac{18}{\cos 40^\circ} \approx 23,5(m).$$

$$\tan ACD = \tan 40^\circ = \frac{AD}{DC}, \text{ suy ra } AD = DC \cdot \tan 40^\circ = 18 \cdot \tan 40^\circ \approx 15,10(m).$$

Vậy chiều cao của tòa nhà là: $AE = AD + DE = AD + CF \approx 15,10 + 5 = 20,1(m)$.

Trong tam giác DBC ta có:

$$\cos BCD = \frac{DC}{BC}, \text{ suy ra } BC = \frac{DC}{\cos B} = \frac{18}{\cos 50^\circ} \approx 28(m).$$

Lại có góc $ACB = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$, áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC , ta có:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos ACB} \\ &\approx \sqrt{23,5^2 + 28^2 - 2 \cdot 23,5 \cdot 28 \cdot \cos 10^\circ} \approx 6,34(m). \end{aligned}$$

Vậy chiều cao của cột cờ khoảng 6,34 m.

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$ và $AB = 5, AD = 8$. Tính độ dài đường chéo AC .

Trả lời: $AC = \sqrt{129}$

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có: $BC = AD = 8, \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos ABC = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 129 \Rightarrow AC = \sqrt{129}.$$

Câu 5. Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8, \hat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Trả lời: $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

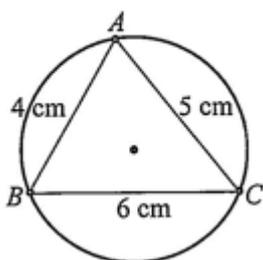
Áp dụng định lí côsin, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 49$$

$$\Rightarrow BC = 7.$$

$$\text{Áp dụng định lí sin ta có: } \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{7}{2 \sin 60^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 6. Từ một miếng bìa hình tròn, bạn Nam cắt ra một hình tam giác ABC có độ dài các cạnh $AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 5 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$ (Hình). Tính bán kính R của miếng bìa ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị xăng-ti-mét)



Trả lời: $\approx 3(\text{cm})$

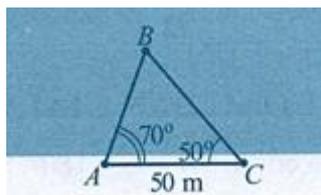
Lời giải

$$\text{Áp dụng định lí côsin cho tam giác } ABC, \text{ ta có: } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Mà } \hat{A} < 180^\circ \text{ nên } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\text{Áp dụng định lí sin, ta có: } \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{6}{2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}} \approx 3(\text{cm}).$$

Câu 7. Để đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ sông đến vị trí B của con tàu bị mắc cạn gần một cù lao giữa sông, bạn Minh đi dọc bờ sông từ vị trí A đến vị trí C cách A một khoảng bằng 50 m và đo các góc $BAC = 70^\circ$, $BCA = 50^\circ$. (Hình). Tính khoảng cách AB theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



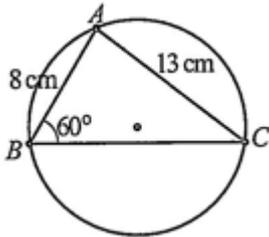
Trả lời: $\approx 44(\text{m})$

Lời giải

Xét tam giác ABC , ta có: $\widehat{ABC} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$.

$$\text{Áp dụng định lí sin, ta có: } \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AB = \frac{AC \sin C}{\sin B} = \frac{50 \sin 50^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 44(m)$$

Câu 8. Từ một tấm bìa hình tròn, bạn Thảo cắt ra một hình tam giác có các cạnh $AB = 8\text{ cm}$, $AC = 13\text{ cm}$ và $\widehat{B} = 60^\circ$ (Hình). Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của miềng bìa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị xăng-ti-mét).



Trả lời: $\approx 7,5(\text{cm})$

Lời giải

Đặt $BC = x(\text{cm})(x > 0)$.

Áp dụng định lí côsin ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$

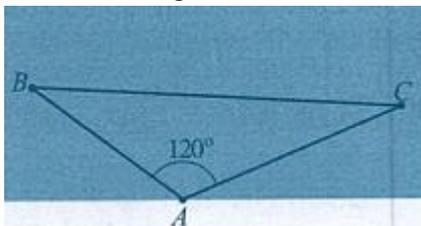
$$\text{Suy ra } 13^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow x^2 - 8x - 105 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được $x = 15$ hoặc $x = -7$. Vì $x > 0$ nên $x = 15$.

Suy ra $BC = 15(\text{cm})$. Áp dụng định lí sin ta có:

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{13}{2 \sin 60^\circ} \approx 7,5(\text{cm}).$$

Câu 9. Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến A và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc 120° (Hình). Tàu thứ nhất đi với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai đi với tốc độ 10 hải lí một giờ. Hỏi sau bao lâu thì khoảng cách giữa hai tàu là 60 hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị giờ)?



Trả lời: 3,8 giờ

Lời giải

Giả sử sau x (giờ) ($x > 0$) tàu thứ nhất ở vị trí B , tàu thứ hai ở vị trí C và khoảng cách $BC = 60$ (hải lí).

Ta có: $AB=8x$ (hải lí); $AC=10x$ (hải lí). Áp dụng định lí côsin, ta có:
 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC$
 $\Leftrightarrow 60^2 = (8x)^2 + (10x)^2 - 2 \cdot 8x \cdot 10x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 244x^2 = 3600 \Rightarrow x \approx 3,8.$

Vậy sau 3,8 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là 60 hải lí.

Câu 10. Cho tam giác ABC có $a = 7\text{ cm}, b = 8, c = 6\text{ cm}$. Hãy tính độ dài đường trung tuyến m_a của tam giác đã cho.?

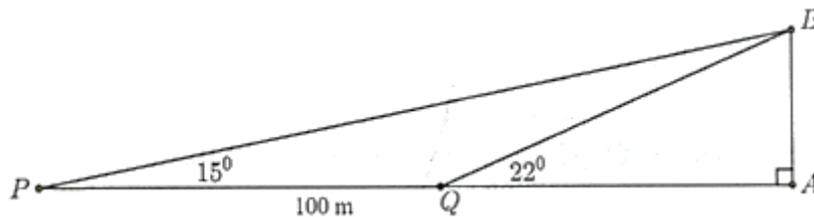
Trả lời: $\frac{\sqrt{151}}{2}$

Lời giải

Ta có:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2(8^2 + 6^2) - 7^2}{4} = \frac{151}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{151}}{2}.$$

Câu 11. Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 100 m . Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ra nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $BPA = 15^\circ$ và $BQA = 22^\circ$. Tính chiều cao AB của tháp?



Trả lời: khoảng $79,56\text{ m}$

Lời giải

$\triangle ABP$ và $\triangle ABQ$ vuông tại A nên $AP = AB \cdot \cot 15^\circ, AQ = AB \cdot \cot 22^\circ$.

Suy ra: $PQ = AP - AQ = AB \cdot \cot 15^\circ - AB \cdot \cot 22^\circ = AB(\cot 15^\circ - \cot 22^\circ)$

$$\Rightarrow AB = \frac{PQ}{\cot 15^\circ - \cot 22^\circ} = \frac{100}{\cot 15^\circ - \cot 22^\circ} \approx 79,56\text{ m}.$$

Vậy tháp hải đăng có chiều cao xấp xỉ $79,56\text{ m}$.

Câu 12. Biết hai lực cùng tác động vào một vật tạo với nhau góc 40° . Cường độ của hai lực đó là 3 N và 4 N . Tính cường độ của lực tổng hợp?

Trả lời: khoảng $6,59\text{ N}$

Lời giải

Giả sử vật được đặt ở vị trí A , hai lực tác động vào A lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ có độ lớn là $3N, 4N$.

Vẽ hình bình hành $ABCD$, ta có hợp lực tác động vào A là: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $AD = BC = 4$.

Ta có: $\angle ABC = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Xét tam giác ABC , theo định lí cô-sin ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 140^\circ \approx 43,39$$

$$\Rightarrow AC \approx 6,59.$$

Vậy độ lớn của lực tổng hợp tác động vào vật A là xấp xỉ $6,59N$.

Câu 13. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $4m_a^2 = b^2 + c^2$, trong đó m_a là độ dài trung tuyến tam giác kẻ từ A ; a, b, c là các cạnh của tam giác. Khi đó tam giác ABC là tam giác gì?

Trả lời: tam giác ABC vuông tại A .

Lời giải:

$$\text{Ta có : } m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \Rightarrow 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2.$$

$$\text{Kết hợp giả thiết: } 4m_a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2(b^2 + c^2) - a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A .

Câu 14. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} = \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_c}{h_b} + \frac{h_a}{h_c}$. Khi đó tam giác ABC

là tam giác gì?

Trả lời: tam giác ABC cân.

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h_a a = \frac{1}{2} h_b b = \frac{1}{2} h_c c \Rightarrow h_a = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a}, h_b = \frac{2S_{\Delta ABC}}{b}, h_c = \frac{2S_{\Delta ABC}}{c}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} = \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_c}{h_b} + \frac{h_a}{h_c} \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

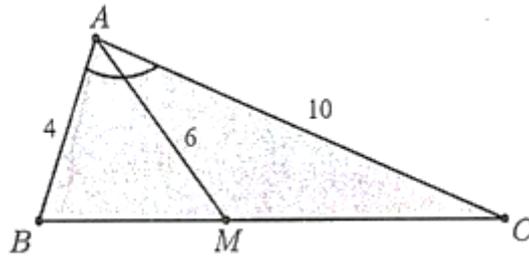
$$\Leftrightarrow b^2c + c^2a + a^2b = a^2c + b^2a + c^2b \Leftrightarrow (a-b)(ab + c^2 - ac - bc) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b = c \\ a = c \end{cases}$$

Vậy tam giác ABC cân.

Câu 15. Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 10$ và đường trung tuyến $AM = 6$. Tính độ dài cạnh BC ?

Trả lời: $2\sqrt{22}$

Lời giải



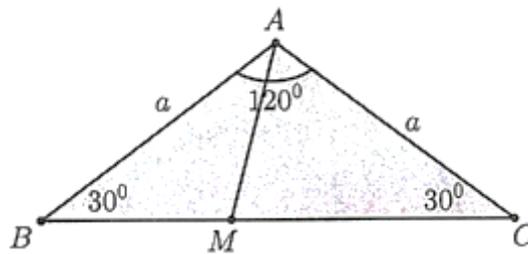
$$\text{Ta có: } AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 4 \left(\frac{AB^2 + AC^2}{2} - AM^2 \right) = 4 \left(\frac{4^2 + 10^2}{2} - 6^2 \right) = 88 \Rightarrow BC = 2\sqrt{22}.$$

Câu 16. Cho tam giác cân ABC có $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = AC = a$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{2BC}{5}$. Tính độ dài AM ?

Trả lời: $\frac{a\sqrt{7}}{5}$

Lời giải



$$\text{Ta có: } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3} \Rightarrow BM = \frac{2a\sqrt{3}}{5} \quad AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 30^\circ}$$

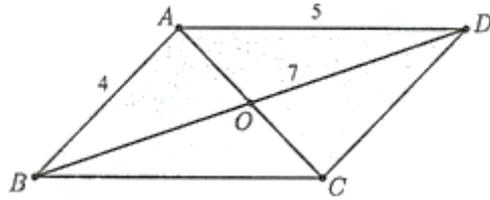
$$= \sqrt{a^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2a \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{7}}{5}.$$

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4, BC = 5, BD = 7$. Tính AC .

Trả lời: $\sqrt{33}$

Lời giải

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $AD = BC = 5$.

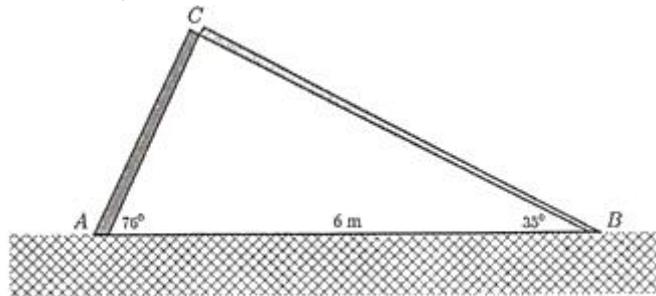


Gọi O là giao điểm hai đường chéo hình bình hành, suy ra O là trung điểm BD .

$$\begin{aligned} \text{Xét } \triangle ABD: OA^2 &= \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \\ &= \frac{4^2 + 5^2}{2} - \frac{7^2}{4} = \frac{33}{4} \Rightarrow OA = \frac{\sqrt{33}}{2}. \end{aligned}$$

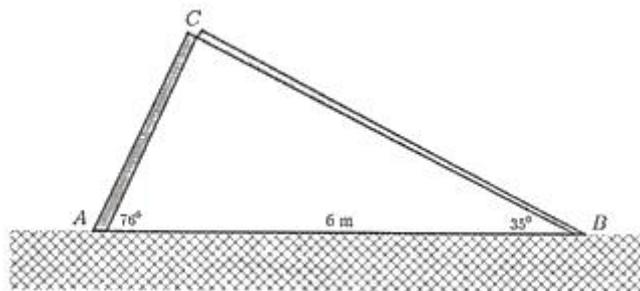
Do đó: $AC = 2OA = \sqrt{33}$.

Câu 18. Một cái cây dạng thẳng đứng bị gió mạnh làm gãy không hoàn toàn (hai đoạn thân bị gãy vẫn dính liền nhau như hình vẽ). Một người muốn đo chiều cao của cây trước khi gãy, người ấy đo được đoạn thẳng nối từ gốc cây đến ngọn cây (đã ngã) là $AB = 6m$, hai góc $CAB = 76^\circ$, $CBA = 35^\circ$. Tính chiều dài của cây trước khi bị gãy (giả sử sự biến dạng lúc gãy không ảnh hưởng đến tổng độ dài của cây)?



Trả lời: khoảng $9,93m$

Lời giải



Ta có: $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (76^\circ + 35^\circ) = 69^\circ$.

Theo định lí sin: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{6 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 3,69m$;

$\Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{6 \cdot \sin 76^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 6,24m \Rightarrow AC + BC \approx 9,93m$.

Vậy chiều cao ban đầu của cây xấp xỉ bằng $9,93m$.

Câu 19. Cho tam giác ABC thỏa mãn $h_a = \sqrt{p(p-a)}$, trong đó a, b, c là ba cạnh, h_a là chiều cao ứng với cạnh a của tam giác và p là nửa chu vi tam giác đó. Tam giác ABC là tam giác gì?

Trả lời: tam giác ABC cân tại A .

Lời giải

$$\text{Ta có: } h_a = \sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow \frac{2S}{a} = \sqrt{p(p-a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} = \sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow 4(p-b)(p-c) = a^2 \Leftrightarrow (a+c-b)(a+b-c) = a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - (b-c)^2 = a^2 \Leftrightarrow (b-c)^2 = 0 \Leftrightarrow b = c.$$

Vậy tam giác ABC cân tại A .

Câu 20. Cho ΔABC có $AB = 9, BC = 10, AC = \sqrt{73}$. Kéo dài BC một đoạn $CI = 5$. Tính độ dài AI

Trả lời: $AI = 12$

Lời giải

$$\text{- Xét } \Delta ABC, \text{ ta có: } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{10^2 + 9^2 - (\sqrt{73})^2}{2 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{3}{5}$$

- Xét ΔABI , ta có:

$$AI^2 = AB^2 + BI^2 - 2 \cdot AB \cdot BI \cdot \cos B = 9^2 + (10+5)^2 - 2 \cdot 9 \cdot (10+5) \cdot \frac{3}{5} = 144$$

$$\Rightarrow AI = 12$$

- Vì $BI^2 = AB^2 + AI^2$ nên ΔABI vuông tại A hay $IA \perp AB$.

Câu 21. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a . Góc $BAD = 30^\circ$. Tính diện tích hình thoi $ABCD$.

Trả lời: $\frac{1}{2}a^2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin BAD = a \cdot a \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}a^2.$$

Câu 22. Cho tam giác ABC , có $AB = 8, AC = 9, BC = 10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = 7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Trả lời: $\frac{3\sqrt{610}}{10}$

Lời giải

Xét ΔABC :

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{83}{160} \cdot AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos B$$

$$= 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{83}{160} = \frac{549}{10} \Rightarrow AM = \frac{3\sqrt{610}}{10}.$$

Câu 23. Cho tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và M là trung điểm của BC . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM

Trả lời: $\frac{25}{8}$

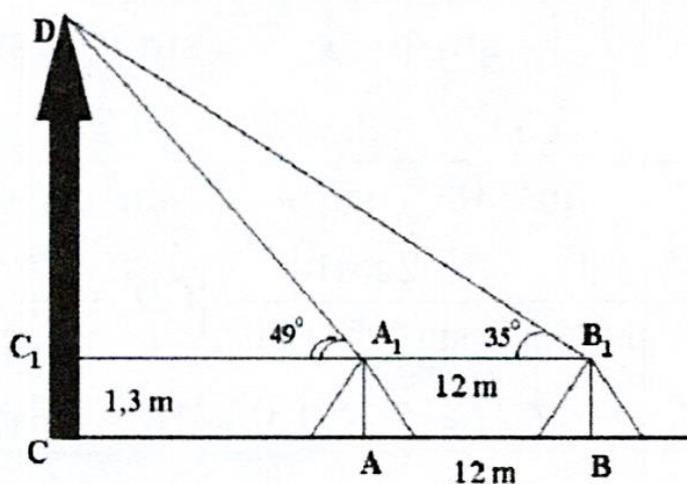
Lời giải

$$AB = 6\text{cm}, AC = 8\text{cm} \Rightarrow BC = 10\text{cm}, AM = BM = \frac{1}{2}BC = 5\text{cm}$$

$$p = \frac{6+5+5}{2} = 8$$

$$S_{ABM} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 12; S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 12} = \frac{25}{8}$$

Câu 24. Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12\text{m}$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3\text{m}$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $DA_1C_1 = 49^\circ$ và $DB_1C_1 = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp.



Trả lời: $\approx 22,77\text{m}$

Lời giải

Ta có: $C_1DA_1 = 90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$; $C_1DB_1 = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$, nên $A_1DB_1 = 14^\circ$.

Xét tam giác A_1DB_1 , có: $\frac{A_1B_1}{\sin A_1DB_1} = \frac{A_1D}{\sin A_1B_1D} \Rightarrow A_1D = \frac{12 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 28,45\text{m}$.

Xét tam giác C_1A_1D vuông tại C_1 , có:

$$\sin C_1A_1D = \frac{C_1D}{A_1D} \Rightarrow C_1D = A_1D \cdot \sin C_1A_1D = 28,45 \cdot \sin 49^\circ \approx 21,47 \text{ m}$$

$$\Rightarrow CD = C_1D + CC_1 \approx 22,77 \text{ m}.$$

Câu 25. Cho ΔABC có $AB = 8, AC = 5, BAC = 60^\circ$. Tính chiều cao AH của ΔABC

Trả lời: $\frac{20\sqrt{3}}{7}$

Lời giải

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ} = 7; S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC = 10\sqrt{3}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Leftrightarrow 10\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot AH \Leftrightarrow AH = \frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

Câu 26. Cho ΔABC có $BC = a; AC = b$. ΔABC có diện tích lớn nhất khi $\hat{C} = ?$

Trả lời: 90°

Lời giải

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C.$$

Diện tích tam giác ABC lớn nhất khi $\sin C$ lớn nhất $\Rightarrow \sin C = 1 \Leftrightarrow C = 90^\circ$

Câu 27. Cho tam giác nhọn ABC có $a = 3, b = 4$ và diện tích $S = 3\sqrt{3}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó..

Trả lời: $\frac{\sqrt{39}}{3}$

Lời giải

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C \Rightarrow \sin C = \frac{2S}{ab} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ.$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = \sqrt{13}; \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{\sqrt{13}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{39}}{3}.$$

Câu 28. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

Trả lời: $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Lời giải

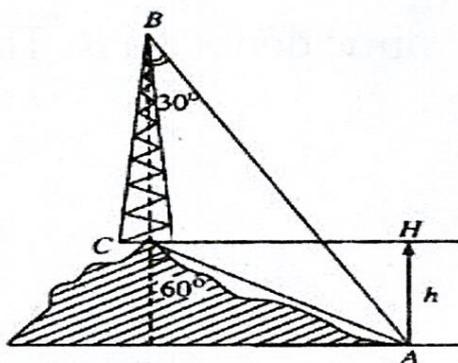
Giả sử đường phân giác trong góc A của ΔABC cắt cạnh BC tại điểm D .

Với S là kí hiệu diện tích tam giác ta có

$$S_{ABC} = S_{ADB} + S_{ADC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AD \cdot AB \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2}.$$

$$\Leftrightarrow AD = 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \frac{AB \cdot AC}{AB + AC} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 29. Trên ngọn đồi có một cái tháp cao $100m$ (hình vẽ). Đỉnh tháp B và chân tháp C lần lượt nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng 30° và 60° so với phương thẳng đứng. Tính chiều cao AH của ngọn đồi.



Trả lời: $50m$

Lời giải

$ACB = 120^\circ; ABC = 30^\circ \Rightarrow BAC = 30^\circ$. Nên $\triangle ABC$ cân tại $C \Rightarrow AC = BC = 100$

Trong tam giác vuông AHC : $\sin ACH = \frac{AH}{AC} \Leftrightarrow AH = AC \cdot \sin 30^\circ = 50m$.

Câu 30. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $20km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $30km/h$. Hỏi sau 3 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km?

Trả lời: $30\sqrt{7}$

Lời giải

Ta có quãng đường tàu thứ nhất đi được là $s_1 = v_1 t = 20 \cdot 3 = 60(km)$.

Quãng đường tàu thứ hai đi được là $s_2 = v_2 t = 30 \cdot 3 = 90(km)$.

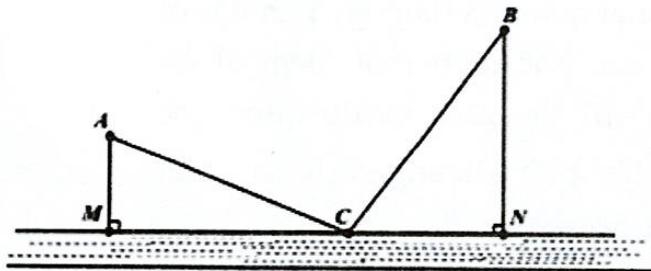
$\triangle ABC$ với B là vị trí tàu thứ nhất chạy đến sau 3 giờ, nghĩa là $AB = s_1 = 60km$; C là vị trí tàu thứ hai chạy đến sau 3 giờ, nghĩa là $AC = s_2 = 90km$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC \Leftrightarrow BC^2 = 60^2 + 90^2 - 2 \cdot 60 \cdot 90 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 6300. \text{ Vậy khoảng cách hai tàu sau 3 giờ chạy là } BC = 30\sqrt{7}.$$

Câu 31. Thành phố Hải Đông dự định xây dựng một trạm nước sạch để cung cấp cho hai khu dân cư A và B . Trạm nước sạch đặt tại vị trí C trên bờ sông. Biết $AB = 3\sqrt{17} km$, khoảng cách từ

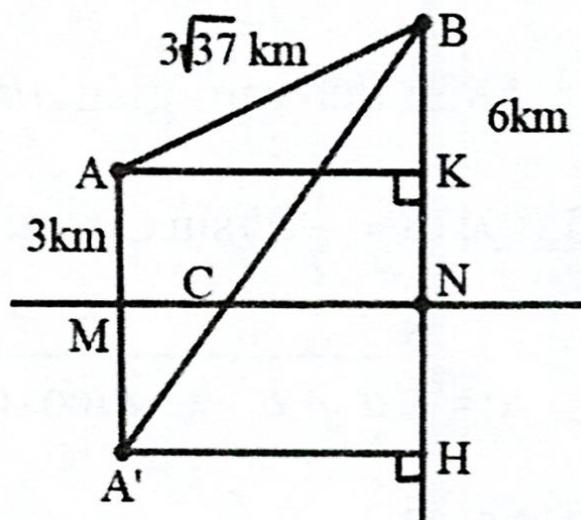
A và B đến bờ sông lần lượt là $AM = 3\text{km}$, $BN = 6\text{km}$ (hình vẽ). Gọi T là tổng độ dài đường ống từ trạm nước đến A và B . Tìm giá trị nhỏ nhất của T .



Trả lời: khoảng 20,12 km

Lời giải

Kẻ $AK \perp BN$; $A'H \perp BN$.



Gọi A' đối xứng với A qua MN , D là trung của NB .

$T = CA + CB = CA' + CB \geq A'B$ (không đổi). Đẳng thức xảy ra khi $\{C\} = MN \cap A'B$.

$$MN = AK = A'H = \sqrt{AB^2 - KB^2} = \sqrt{(3\sqrt{37})^2 - 3^2} = 18\text{km}.$$

$$\text{Vậy } A'B = \sqrt{A'H^2 + HB^2} = \sqrt{18^2 + 9^2} = 9\sqrt{5} \approx 20,12\text{km}.$$

Câu 32. Tam giác ABC có $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}$, $AC = 4$, $BC = 5$. Tính cạnh AB .

Trả lời: 6

Lời giải

Vì trong tam giác ABC ta có $A+B$ bù với góc C nên $A+B = 180^\circ - C$

$$\cos(A+B) = -\frac{1}{8} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{8}; AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{8}} = 6$$

Câu 33. Tam giác có ba cạnh lần lượt là 5,12,13. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất.

Trả lời: $\frac{60}{13}$

Lời giải

Đặt $a=5, b=12, c=13$. Nửa chu vi của tam giác là: $p = \frac{5+12+13}{2} = 15$

Diện tích của tam giác là:

$$S = \sqrt{p(p-5)(p-12)(p-13)} = \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} = 30.$$

Cách khác: vì $5^2 + 12^2 = 13^2$ nên tam giác đã cho vuông, $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$

Đường cao ứng với cạnh lớn nhất là: $h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 30}{13} = \frac{60}{13}$.

Câu 34. Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

Trả lời: $1 + \sqrt{2}$

Lời giải

Giả sử $AB = AC = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác $S = pr = \frac{AB \cdot AC}{2} \Leftrightarrow \frac{2a + a\sqrt{2}}{2} r = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow r = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$

Suy ra $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$.

Câu 35. Tính góc C của tam giác ABC biết $a \neq b$ và $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2)$.

Trả lời: $C = 120^\circ$

Lời giải

$$a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2) \Leftrightarrow a^3 - b^3 - c^2(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) - c^2(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 - c^2) = 0 \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -ab \text{ vì } a \neq b$$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-ab}{2ab} = \frac{-1}{2}.$$

Do đó $C = 120^\circ$

Câu 36. Cho tam giác ABC , các đường cao h_a, h_b, h_c thỏa mãn hệ thức $3h_a = 2h_b + h_c$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c .

Trả lời: $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$

Lời giải

Kí hiệu $S = S_{\triangle ABC}$. Ta có: $3h_a = 2h_b + h_c \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 2S}{a} = \frac{2 \cdot 2S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$

Câu 37. Cho tam giác ABC có $\frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}$ và $a = 10$. Tính chu vi tam giác đó.

Trả lời: 24

Lời giải

$$\frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{3}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin A} = \frac{8}{\sin B} = \frac{6}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{8}{\sin B} = \frac{6}{\sin C}.$$

Theo định lý sin trong tam giác ta tính được $b = 8, c = 6$.

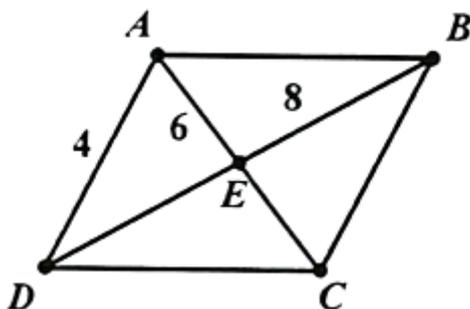
Chu vi tam giác là $a + b + c = 24$.

Câu 38. Hình bình hành có một cạnh là 4 hai đường chéo là 6 và 8. Tính độ dài cạnh kề với cạnh có độ dài bằng 4.

Trả lời: $AB = \sqrt{34}$

Lời giải

Gọi hình bình hành là $ABCD$. Gọi E là giao điểm hai đường chéo. Giả sử $AD = 4$.



Xét $\triangle ADE$. Ta có: $\cos ADE = \frac{AD^2 + DE^2 - AE^2}{2 \cdot AD \cdot DE}$

$$= \frac{4^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{23}{32}$$

Xét $\triangle ABD$. Ta có: $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos ADB = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{23}{32} = 34$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{34}.$$

Câu 39. Tam giác ABC có $AB = 1, AC = 3, A = 60^\circ$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Trả lời: $\frac{\sqrt{21}}{3}$

Lời giải

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

Ta lại có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{\sqrt{7}}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Câu 40. Cho tam giác ABC nhọn có $BC = 3a$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc A .

Trả lời: $A = 60^\circ$

Lời giải

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{2R} = \frac{3a}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra $A = 60^\circ$ (do tam giác ABC nhọn).

Câu 41. Cho tam giác ABC nhọn thỏa mãn $2a \sin B = b\sqrt{3}$. Tính số đo góc A .

Trả lời: $A = 60^\circ$

Lời giải

Có $a \sin B = b \sin A$ nên $2a \sin B = b\sqrt{3} \Leftrightarrow 2b \sin A = b\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $A = 60^\circ$ (Do ABC là tam giác nhọn).

Câu 42. Cho tam giác ABC có góc $A = 30^\circ$, góc $B = 45^\circ$. Tính $\frac{h_a}{h_b}$.

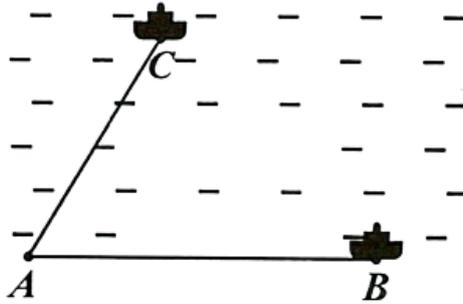
Trả lời: $\sqrt{2}$

Lời giải

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$$

Theo định lý sin có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Vậy $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \sqrt{2}$.

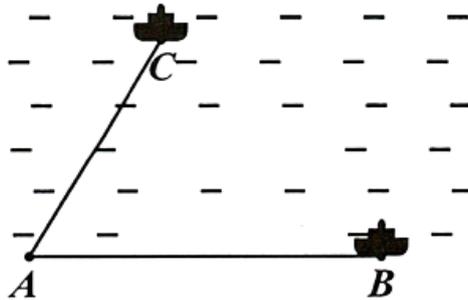
Câu 43. Hai chiếc tàu thuyền cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?



Trả lời: khoảng 36 hải lí.

Lời giải

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí.



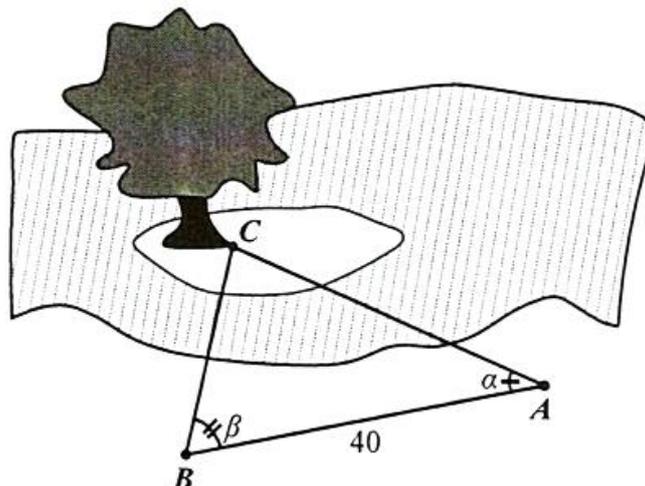
Vậy tam giác ABC có $AB = 40$, $AC = 30$ và $A = 60^\circ$.

Áp dụng định lí cô-sin vào tam giác ABC , ta có:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ &= 30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ = 1300 \\ &\Rightarrow a \approx 36. \end{aligned}$$

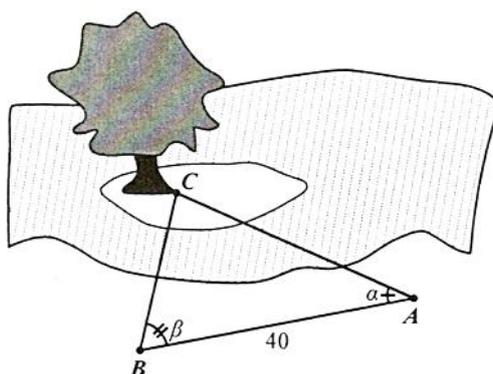
Vậy sau 2 giờ hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí.

Câu 44. Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40m$, $CAB = 45^\circ$, $CBA = 70^\circ$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán khoảng cách AC bằng bao nhiêu mét?



Trả lời: khoảng $41,47m$

Lời giải



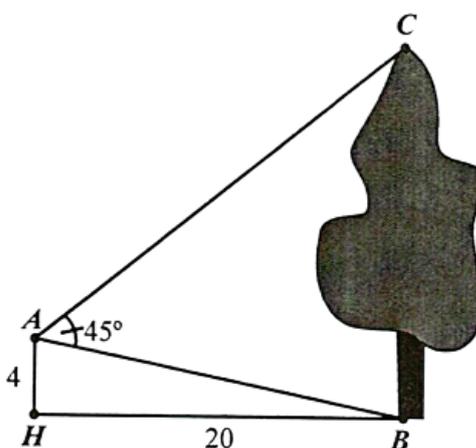
Ta có: $C = 180^\circ - A - B = 65^\circ$.

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 65^\circ} \approx 41,47m.$$

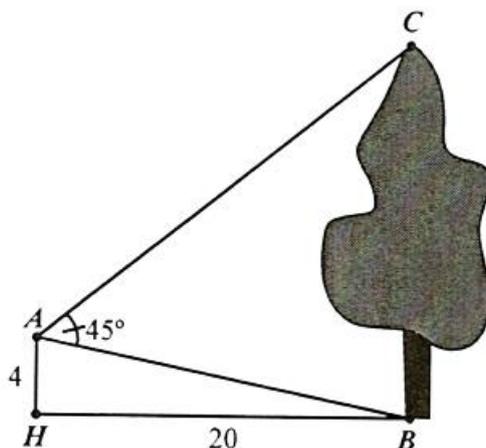
Vậy khoảng cách giữa A và C khoảng $41,47m$.

Câu 45. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết $AH = 4m$, $HB = 20m$, $BAC = 45^\circ$. Tính chiều cao của cây?



Trả lời: khoảng $17,33m$

Lời giải



Trong tam giác AHB , ta có

$$\tan ABH = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \Rightarrow ABH \approx 11^{\circ}19'.$$

$$AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = 4\sqrt{26}.$$

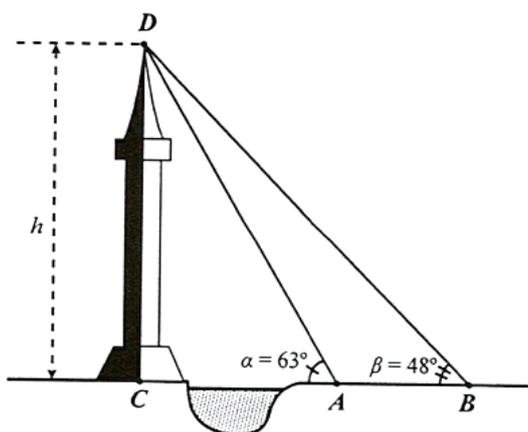
$$\text{Suy ra } ABC = 90^{\circ} - 11^{\circ}19' = 78^{\circ}41'.$$

$$\text{Suy ra } ACB = 180^{\circ} - (BAC + ABC) = 56^{\circ}19'.$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta được:

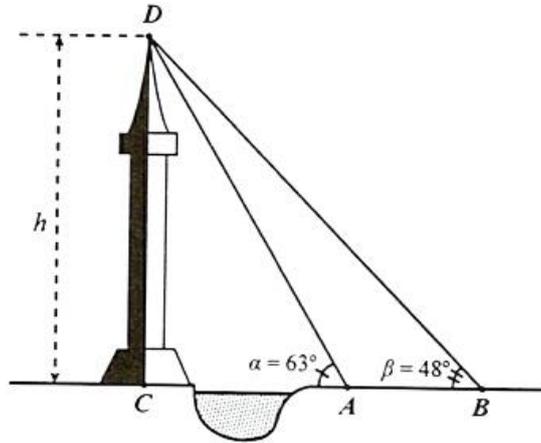
$$\frac{AB}{\sin ACB} = \frac{CB}{\sin BAC} \Rightarrow CB = \frac{AB \cdot \sin BAC}{\sin ACB} \approx 17,33m$$

Câu 46. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24m$, $CAD = 63^{\circ}$, $CBD = 48^{\circ}$. Tính chiều cao h của tháp?



Trả lời: khoảng $68,91m$

Lời giải



Ta có $\alpha = D_1 + \beta \Rightarrow D_1 = \alpha - \beta = 63^\circ - 48^\circ = 15^\circ$.

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABD , ta có

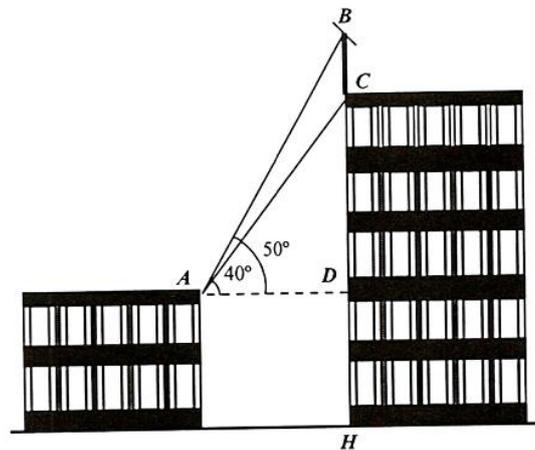
$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin D_1} \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin D_1} = \frac{24 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 68,91m$$

Trong tam giác vuông ACD , có

$$h = CD = AD \cdot \sin \alpha \approx 68,91m.$$

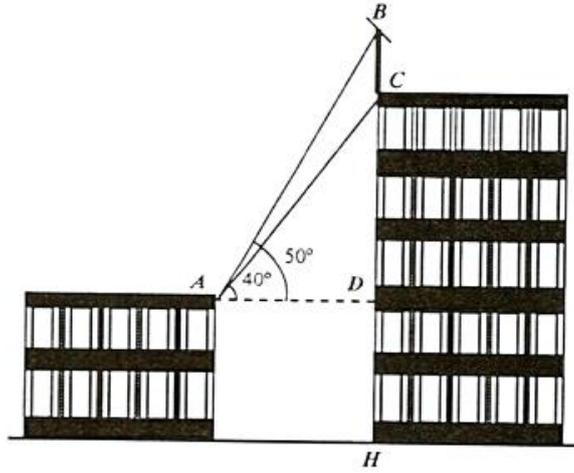
Vậy chiều cao của cái tháp khoảng $68,91m$.

Câu 47. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao $5m$. Từ vị trí quan sát A cao $7m$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà?



Trả lời: khoảng $18,9m$

Lời giải



Từ hình vẽ, suy ra $BAC = 10^\circ$

và $ABD = 180^\circ - (BAD + ADB) = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có

$$\frac{BC}{\sin BAC} = \frac{AC}{\sin ABC}$$

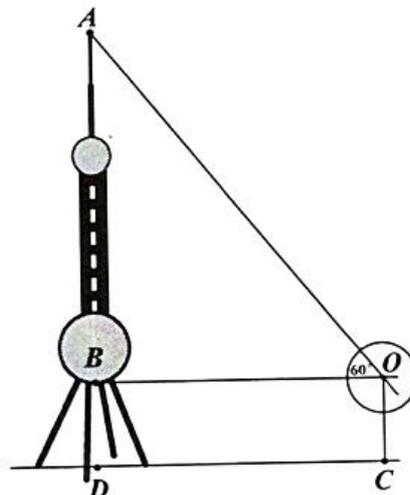
$$\Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin ABC}{\sin BAC} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,5m$$

Trong tam giác vuông ADC , ta có $\sin CAD = \frac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC \cdot \sin CAD = 11,9m$.

Suy ra, $CH = CD + DH = 11,9 + 7 = 18,9m$.

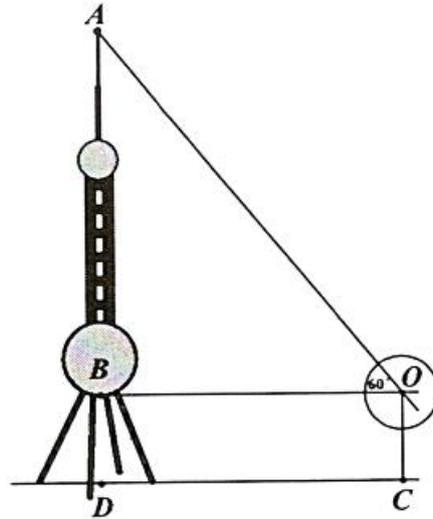
Vậy chiều cao của toà nhà khoảng $18,9m$.

Câu 48. Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60m$, biết chiều cao của giác kế là $OC = 1m$. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $AOB = 60^\circ$. Tính chiều cao của ngọn tháp?



Trả lời: khoảng $105m$.

Lời giải



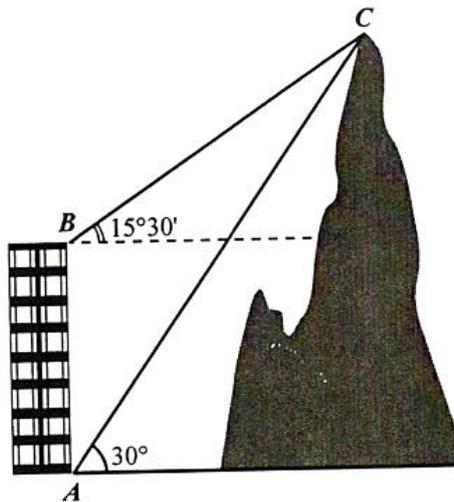
Tam giác OAB vuông tại B , có

$$\tan AOB = \frac{AB}{OB} \Rightarrow AB = \tan 60^\circ \cdot OB = 60\sqrt{3} m.$$

Vậy chiều cao của ngọn tháp là

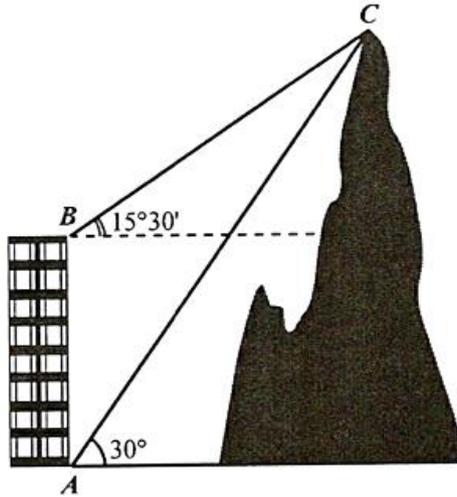
$$h = AB + OC = (60\sqrt{3} + 1) \approx 105 m.$$

Câu 49. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70m$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất là bao nhiêu mét?



Trả lời: khoảng $135m$

Lời giải



Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $CAB = 60^\circ$, $ABC = 105^\circ 30'$ và $AB = 70$.

Khi đó $A + B + C = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 165^\circ 30' = 14^\circ 30'$$

Theo định lí sin, ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \approx 269,4m.$$

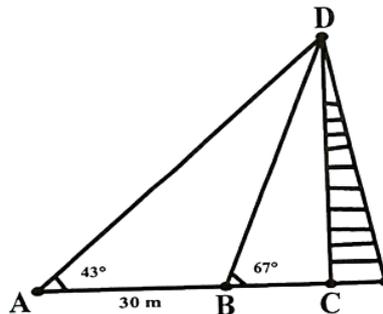
Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất.

Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30° nên:

$$CH = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{AC}{2} = \frac{269,4}{2} = 134,7m.$$

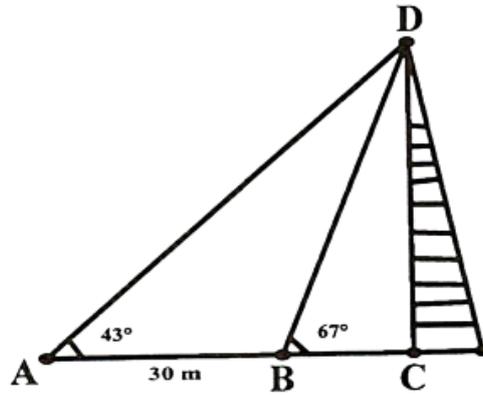
Vậy ngọn núi cao khoảng $135m$.

Câu 50. Giả sử chúng ta cần đo chiều cao CD của một cái tháp với C là chân tháp, D là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp được nên từ hai điểm A, B có khoảng cách $AB = 30m$ sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, người ta đo được các góc $CAD = 43^\circ$, $CBD = 67^\circ$ (như hình vẽ trên). Hãy tính chiều cao CD của tháp?



Trả lời: xấp xỉ $46m$.

Lời giải



$$\frac{DB}{\sin DAB} = \frac{AB}{\sin ADB} \Rightarrow BD = \frac{30 \sin 43^\circ}{\sin 24^\circ}$$

$$\text{Lại có } \frac{CD}{DB} = \sin 67^\circ \Rightarrow CD = DB \cdot \sin 67^\circ = \frac{30 \sin 67^\circ \sin 43^\circ}{\sin 24^\circ} \approx 46m.$$

Vậy chiều cao của tháp xấp xỉ $46m$.