CÂU HỎI

Câu 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=8a$; đáy nhỏ $CD=4a$; đường cao $AD=6a$; I là trung điểm của AD. Tính $(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})\cdot\overrightarrow{ID}$.

Trả lời:………………..

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a, AC=2\sqrt{3}a$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}$.

Trả lời:………………

Câu 3. Cho $A(1;2)$ và $B(-1;3)$. Cho điểm $P(0,b)$.

Tính $\cos APB$ theo tung độ của P.

Trả lời:………………

Câu 4. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Khi đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AM^2-kBC^2$. Vậy $k=?$

Trả lời:………………

Câu 5. Cho hình vuông $ABCD$; E là trung điểm của AB, F là điểm sao cho $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Xác định vị trí của điểm M trên đường thẳng BC sao cho $EFM=90^\circ$.

Trả lời:………………

Câu 6. Cho tam giác ABC cân tại $A;M$ là trung điểm của BC,H là hình chiếu của M trên $AC;E$ là trung điểm của MH. Tính $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}$

Trả lời:………………

Câu 7. Cho tam giác ABC có $BC=a,CA=b,AB=c$. Biết M là trung điểm của BC.

Tính $\overrightarrow{AM}^2$?

Trả lời:………………

Câu 8. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Biết rằng AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Tính $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}$ biết $AB=2$.

Trả lời:………………

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm CD. Khi đó BMN là tam giác vuông cân tại đỉnh nào?

Trả lời:………………

Câu 10. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC,D là hình chiếu của H trên AC,M là trung điểm của HD. Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$

Trả lời:………………

Câu 11. Cho hai điểm A,B cố định có khoảng cách bằng a. Tập hợp điểm M sao cho:

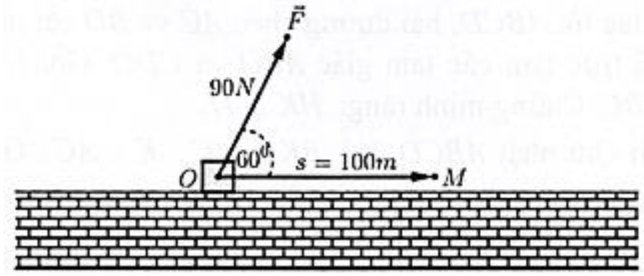
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\dfrac{3a^2}{4}$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:………………

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k. Tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:………………

Câu 13. Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn $90N$ làm một vật dịch chuyển một đoạn $100m$. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60°. Tính công sinh ra bởi lực $\vec{F}$.



Trả lời:………………

Câu 14. Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD và BC. Tính $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{IJ}$?

Trả lời:………………

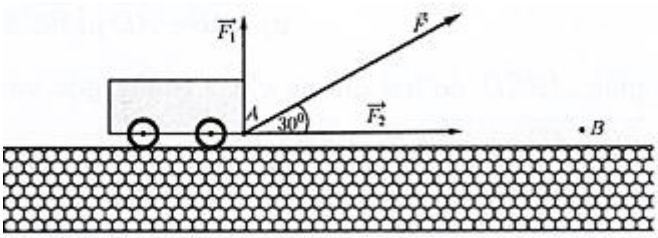
Câu 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK\perp AC, K\in AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD. Tìm số đo góc BMN.

Trả lời:………………

Câu 16. Cho đoạn $AB=20$. Tồn tại điểm M sao cho $T=3MA^2+2MB^2$ đạt giá trị bé nhất $T_{\min}$. Tính giá trị $T_{\min}$?

Trả lời:………………

Câu 17. Một chiếc xe được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn $50N$, di chuyển theo quãng đường từ A đến B có chiều dài $200m$. Cho biết góc hợp bởi lực $\vec{F}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng 30° và lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F_1},\vec{F_2}$. Tính công sinh ra bởi các lực $\vec{F},\vec{F_1},\vec{F_2}$?



Trả lời:………………

Câu 18. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC=7cm$ và $BC=14cm$. Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$.

Trả lời:………………

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM=1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN=1$ và P là trung điểm BC. Tính $\cos MNP$.

Trả lời:………………

Câu 20. Cho tam giác ABC. Gọi M,N,E lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. Tính:
$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Trả lời:………………

Câu 21. Cho tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O) bán kính R,M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn (O). Tính $MA^2+MB^2+MC^2$.

Trả lời:………………

Câu 22. Cho tam giác ABC vuông tại A, trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm B' và C' sao cho $AB\cdot AB'=AC\cdot AC'$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'C'}$

Trả lời:………………

Câu 23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Trả lời:………………

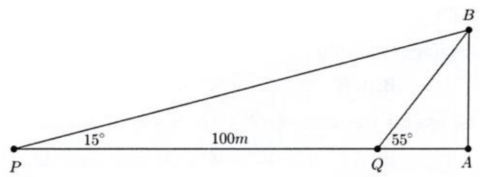
Câu 24. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=\sqrt{3}$ và $(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$. Tính $|\vec{a}+\vec{b}|$.

Trả lời:………………

Câu 25. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Tập hợp điểm M thỏa mãn
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=a^2$ là đường tròn bán kính $R=?$.

Trả lời:………………

Câu 26. Hai chiếc tàu thủy P và Q trên biển cách nhau $100m$ và thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $BPA=15^\circ$ và $BQA=55^\circ$. Tính chiều cao của tháp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Trả lời:………………

Câu 27. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có cạnh bằng a và $ABD=60^\circ$. Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BI}$.

Trả lời:………………………..

Câu 28. Cho ΔABC đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $MA^2+MB^2=18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Câu 29. Cho ΔABC đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $MA^2+MB^2+MC^2=18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:…………………………..

Câu 30. Cho ΔABC đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $2MA^2+MB^2+MC^2=18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:…………………………..

Câu 31. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC và H là trực tâm. Biết $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=kBC^2$. Khi đó $k=$?

Trả lời:……………………

Câu 32. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$. Tính $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Trả lời:……………………

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=8a$; đáy nhỏ $CD=4a$; đường cao $AD=6a$; I là trung điểm của AD. Tính $(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})\cdot\overrightarrow{ID}$.

Trả lời: $-18a^2$

Lời giải

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID}\\&=-\overrightarrow{IA}^2+IB\cdot ID\cdot\cos BID\\&=-IA^2-IB\cdot ID\cdot\cos BIA\\&=-IA^2-IB\cdot ID\cdot\frac{IA}{IB}\\&=-IA^2-IA^2=-2IA^2=-2\cdot(3a)^2=-18a^2.\end{aligned}$$

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a, AC=2\sqrt{3}a$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}$.

Trả lời: $\frac{-a^2}{2}$

Lời giải

Tam giác AMB có $AM=BM=AB$ nên là tam giác đều. Suy ra $MAB=60^\circ$.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AM}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})=-a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\frac{-a^2}{2}.$$

Câu 3. Cho $A(1;2)$ và $B(-1;3)$. Cho điểm $P(0,b)$.

Tính $\cos APB$ theo tung độ của P.

Trả lời: $\dfrac{b^2-5b+5}{\sqrt{(b-2)^2+1}\cdot\sqrt{(b-3)^2+1}}$

Lời giải

Vì P thuộc trục tung nên $P(0,b)$. Khi đó $\overrightarrow{PA}=(1;2-b)$ và $\overrightarrow{PB}=(-1;3-b)$.

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=1.(-1)+(2-b)(3-b)=b^2-5b+5$

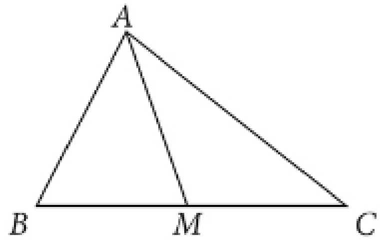
$$\cos APB=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{b^2-5b+5}{\sqrt{(b-2)^2+1}\cdot\sqrt{(b-3)^2+1}}.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Khi đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AM^2-kBC^2$. Vậy $k=?$

Trả lời: $\frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có:



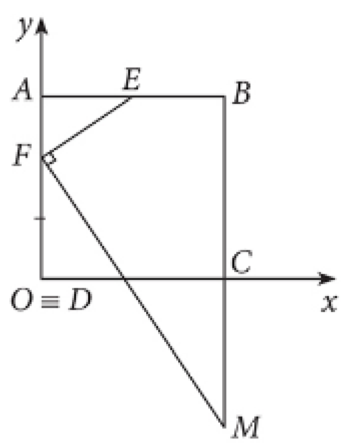
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}{4}$$
$$=\frac{4AM^2-BC^2}{4}=AM^2-\frac{1}{4}BC^2.$$

Câu 5. Cho hình vuông $ABCD$; E là trung điểm của AB, F là điểm sao cho $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Xác định vị trí của điểm M trên đường thẳng BC sao cho $EFM=90^\circ$.

Trả lời: là điểm nằm trên phần kéo dài của BC về phía C sao cho $CM=\frac{5a}{6}$.

Lời giải

Gọi a là độ dài cạnh hình vuông.



Xét hệ trục toạ độ xOy sao cho $D \equiv O=(0;0), C=(a;0), A=(0;a)$.

Dễ thấy $E=\left(\frac{a}{2};a\right); F=\left(0;\frac{2a}{3}\right)$.

Giả sử $M=(a;y) \quad (y \in \mathbb{R})$. Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{FE}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{3}\right) \\ \overrightarrow{FM}=\left(a;y-\frac{2a}{3}\right) \end{cases}$

Vậy ta có biến đổi tương đương:

$EF \perp FM$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FM}=0$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2}+\frac{a}{3}\left(y-\frac{2a}{3}\right)=0 \Leftrightarrow y=\frac{-5a}{6}$.

Vậy $M\left(a;\frac{-5a}{6}\right)$.

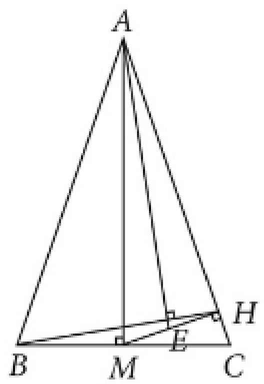
Từ đó M là điểm nằm trên phần kéo dài của BC về phía C sao cho $CM=\frac{5a}{6}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC cân tại $A; M$ là trung điểm của BC, H là hình chiếu của M trên $AC; E$ là trung điểm của MH. Tính $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}$

Trả lời: $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}=0$

Lời giải

Ta có biến đổi tích vô hướng như sau:



$2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BH}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AH}) \cdot (\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MH})$

$=\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH}+\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BM}$

$=\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH}+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MH}) \cdot \overrightarrow{BM}$

$= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MC}$

$= \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MH}$

$= \overrightarrow{MH}^2 + \overrightarrow{MH}^2 = 0.$

Suy ra $AE \perp BH$ (đpcm).

Suy ra $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH} = 0$

Câu 7. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Biết M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM}^2$?

Trả lời: $\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$

Lời giải

Vì M là trung điểm của BC, nên: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$;

$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2\right)$. Mà $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$;

Suy ra: $\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + 2 \cdot \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2} + b^2\right) = \dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$.

(đây cũng là công thức để tính độ dài đường trung tuyến tam giác).

Câu 8. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Biết rằng AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD}$ biết $AB = 2$.

Trả lời: 4

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BE} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD}.$

Vì AB là đường kính nửa đường tròn nên

$ADB = 90^\circ, ACB = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$

Khi đó: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4$

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \dfrac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm CD. Khi đó BMN là tam giác vuông cân tại đỉnh nào?

Trả lời: vuông cân tại đỉnh M.

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b}$.

Khi đó: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{4}(-\vec{a}+3\vec{b})$ và

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{4}(3\vec{a}+\vec{b})$.

Ta có: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{1}{16}(-\vec{a}+3\vec{b})(3\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{16}\left(-3\vec{a}^2+3\vec{b}^2+8\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

$=\frac{1}{16}\left(-3AD^2+3AB^2+0\right)=0\Rightarrow MB\perp MN(1)$.

Hơn nữa: $\overrightarrow{MB}^2=\frac{1}{16}(-\vec{a}+3\vec{b})^2=\frac{1}{16}\left(\vec{a}^2+9\vec{b}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\frac{1}{16}\left(AD^2+9AB^2-0\right)=\frac{5}{8}AB^2$;

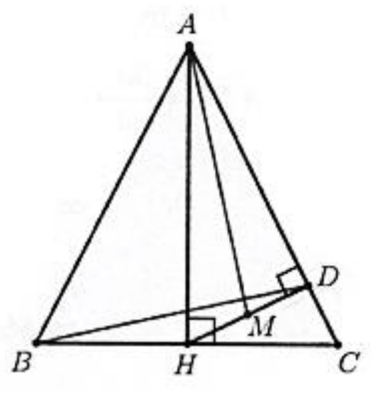
$\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{16}(3\vec{a}+\vec{b})^2=\frac{1}{16}\left(9\vec{a}^2+\vec{b}^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\frac{1}{16}\left(9AD^2+AB^2+0\right)=\frac{5}{8}AB^2$.

Suy ra $MB=MN$ (2). Từ (1) và (2) suy ra ΔBMN vuông cân tại đỉnh M.

Câu 10. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC,D là hình chiếu của H trên AC,M là trung điểm của HD. Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$

Trả lời: 0

Lời giải



Ta cần chứng minh: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=0$. Ta có: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD};\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD})$

Do đó: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HD})$, mà $\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}=0(\text{ do } AH\perp BC)\\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HD}=0(\text{ do } HD\perp AC)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HC})$

$$=\frac{1}{2}[\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD})\cdot\overrightarrow{HC}]$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\underbrace{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}}_{0}+\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{HC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{AC}=0.$$

Vậy $AM\perp DB$.

Câu 11. Cho hai điểm A,B cố định có khoảng cách bằng a. Tập hợp điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\dfrac{3a^2}{4}$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời: $R=a$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB ta có:

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{3a^2}{4}\Leftrightarrow(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=\frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=\frac{3a^2}{4}\Leftrightarrow MI^2-IA^2=\frac{3a^2}{4}$$

$$\overset{IA=\frac{a}{2}}{\Leftrightarrow} MI^2=\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}\Leftrightarrow MI=a.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R=a$.

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k. Tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời: $R=\sqrt{\dfrac{k+a^2}{2}}$

Lời giải

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta có : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2$.

Hoàn toàn tương tự, ta có: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=MI^2-IB^2$.

Khi đó: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k\Leftrightarrow 2MI^2-IA^2-IB^2=k\Leftrightarrow 2MI^2-2IA^2=k$

$$\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}+IA^2\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}+\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow MI=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$$

(trong đó $IA^2=\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{2}$).

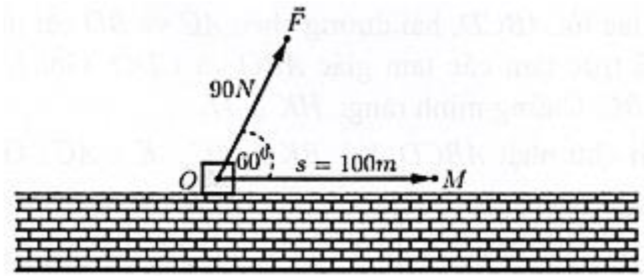
Nếu $k < -a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng.

Nếu $k = -a^2$ thì $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ (điểm M trùng với điểm I).

Nếu $k > -a^2$ thì $MI = \sqrt{\dfrac{k+a^2}{2}}$.

Khi đó tập hợp điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $R = \sqrt{\dfrac{k+a^2}{2}}$.

Câu 13. Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn $90N$ làm một vật dịch chuyển một đoạn $100m$. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60° . Tính công sinh ra bởi lực $\vec{F}$.



Trả lời: $4500J$

Lời giải

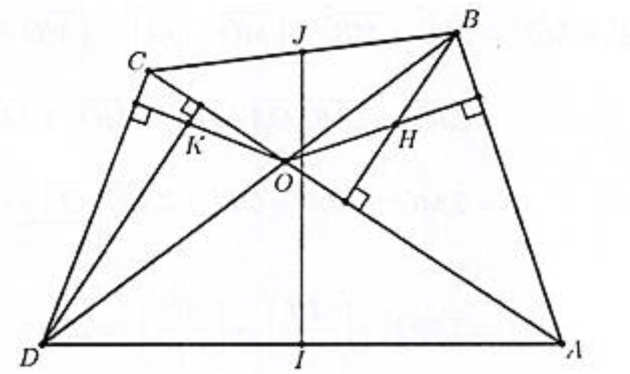
Đặt $OM = s$ là đoạn đường mà vật di chuyển được với O là điểm đặt vật ban đầu. Công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là:

$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{OM} = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{OM}) = 90 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 4500J.$

Câu 14. Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD và BC. Tính $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ}$?

Trả lời: 0

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} \\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

Suy ra: $\overrightarrow{HK} \cdot 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{DB}$

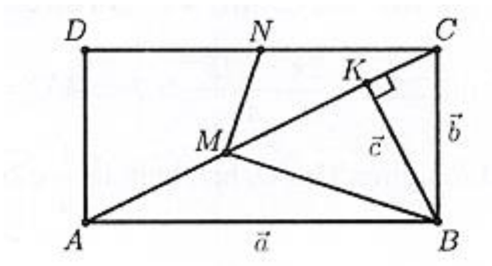
$=(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DK})\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK})\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{AC}\cdot\vec{0}=0$.

Vậy $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{IJ}=0$

Câu 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK\perp AC, K\in AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD. Tìm số đo góc BMN.

Trả lời: 90°

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b}, \overrightarrow{BK}=\vec{c}$ và $BA=a, BC=b, BK=c$. Khi đó:

$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}), \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{2}(2\vec{b}-\vec{c})$.

Do đó: $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}(2\vec{b}-\vec{c})(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{4}\left(2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}^2\right)$

$=\frac{1}{4}[2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\vec{b}-\vec{a})\vec{c}+(\vec{b}-\vec{c})\vec{c}]$.

Ta thấy rằng: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ do $\vec{a}\perp\vec{b}; (\vec{b}-\vec{a})\vec{c}=\overrightarrow{AC}\cdot\vec{c}=0$

Do $AC\perp BK; (\vec{b}-\vec{c})\vec{c}=\overrightarrow{KC}\cdot\vec{c}=0$ do $CK\perp BK$.

Vì vậy $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BM}=0\Rightarrow BMN=90^\circ$.

Câu 16. Cho đoạn $AB=20$. Tồn tại điểm M sao cho $T=3MA^2+2MB^2$ đạt giá trị bé nhất $T_{\min}$. Tính giá trị $T_{\min}$?

Trả lời: 480

Lời giải

Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$

Vậy điểm I thuộc đoạn AB và $IA=\frac{2}{5}\cdot AB=\frac{2}{5}\cdot 20=8, IB=12$.

Ta có : $T=3MA^2+2MB^2=3\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MB}^2=3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$

$= 3\overrightarrow{MI}^2 + 6\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}^2 + 4\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB}^2$

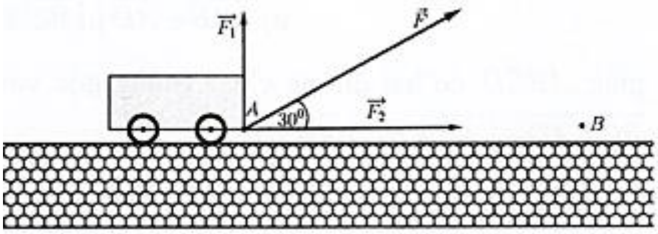
$= 5MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\underbrace{3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}) = 5MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2.$

Ta có $\left(3IA^2 + 2IB^2\right)$ là hằng số do ba điểm A, B, I cố định.

Do đó: T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow 5MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ bé nhất $\Leftrightarrow$ Điểm M trùng với điểm I.

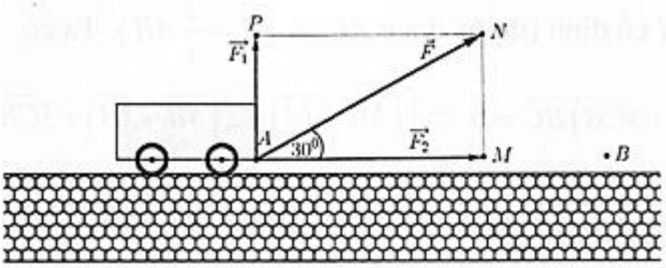
Khi đó giá trị T nhỏ nhất là $: T_{\min} = 3IA^2 + 2IB^2 = 3\cdot 8^2 + 2\cdot 12^2 = 480$.

Câu 17. Một chiếc xe được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn $50N$, di chuyển theo quãng đường từ A đến B có chiều dài $200m$. Cho biết góc hợp bởi lực $\vec{F}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng 30° và lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$. Tính công sinh ra bởi các lực $\vec{F}, \vec{F_1}, \vec{F_2}$?



Trả lời: $5000\sqrt{3}\,J$; 0; $5000\sqrt{3}\,J$

Lời giải



Đặt $\vec{F} = \overrightarrow{AN}, \vec{F_1} = \overrightarrow{AP}, \vec{F_2} = \overrightarrow{AM}$.

Khi đó $AMNP$ là hình bình hành, mà $AM \perp AP$ nên $AMNP$ là hình chữ nhật.

Ta có : $AN = 50, AM = AN\cdot\cos 30^\circ = 50\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$,

$AP = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = 25.$

Lực $\vec{F}$ sinh ra công $A = |\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos 30^\circ = 50\cdot 200\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5000\sqrt{3}\,J$.

Lực $\vec{F_1}$ có độ lớn $25N$ và tạo với phương dịch chuyển góc 90° nên công sinh ra là

$A_1 = \left|\vec{F_1}\right|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos 90^\circ = 0\,J$.

Lực $\vec{F_2}$ có độ lớn $25\sqrt{3}\,N$ và tạo với phương dịch chuyển góc 0° nên công sinh ra là

$A_2 = \left|\vec{F_2}\right|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos 0^0 = 25\sqrt{3}\cdot 200\cdot 1 = 5000\sqrt{3}\,J$.

Câu 18. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC = 7cm$ và $BC = 14cm$.
Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$.

Trả lời: $-\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - ACB$.

Mà $\cos(ACB) = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ nên $ACB = 60^\circ$.

Vậy $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ hay $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN = 1$ và P là trung điểm BC. Tính $\cos MNP$.

Trả lời: $\frac{13}{5\sqrt{10}}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = \frac{2}{9} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{13}{2}$

Mặt khác $|\overrightarrow{NM}| = \sqrt{10}, |\overrightarrow{NP}| = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos MNP = \frac{13}{5\sqrt{10}}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính:
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Trả lời: 0

Lời giải

Vì M là trung điểm BC nên:

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} (1)$

Tương tự ta có: $2\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} (2)$,

$2\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} (3)$

Cộng từng vế (1), (2), (3) được:

$2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ hay $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (đpcm).

Câu 21. Cho tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O) bán kính R, M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn (O). Tính $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Trả lời: $2a^2$

Lời giải

Tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O) bán kính R nên O là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ và $R=OA=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2=2a^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2=2a^2$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=2a^2$

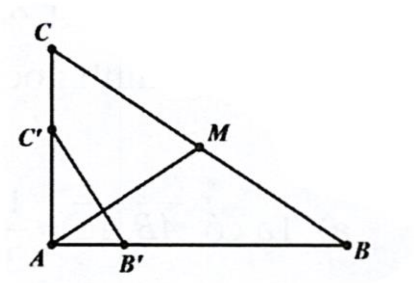
$\Leftrightarrow 6R^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\vec{0}=2a^2 \Leftrightarrow 6\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=2a^2$

Vậy $MA^2+MB^2+MC^2=2a^2$.

Câu 22. Cho tam giác ABC vuông tại A, trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm B' và C' sao cho $AB\cdot AB'=AC\cdot AC'$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'C'}$

Trả lời: 0

Lời giải



Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Do đó, $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'C'}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB'}\right)$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB'}=0-AB\cdot AB'+AC\cdot AC'=0$

Câu 23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Trả lời: 0

Lời giải

Ta có: $AC=BD=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Suy ra

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=-a^2+0+0+\frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2=0.$

Câu 24. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=\sqrt{3}$ và $(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$. Tính $|\vec{a}+\vec{b}|$.

Trả lời: $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$

Lời giải

Ta có $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\vec{b}}=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})}=\sqrt{7-2\sqrt{3}}$

Câu 25. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=a^2$ là đường tròn bán kính $R=?$.

Trả lời: $R=a$

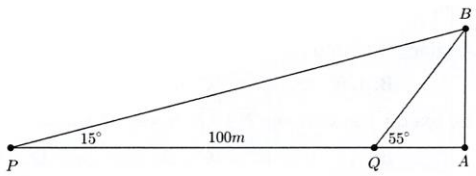
Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=a^2\Leftrightarrow MO^2-OA^2+MO^2-OB^2=a^2\Leftrightarrow MO^2=a^2$

$\Leftrightarrow MO=a\left(OA=OB=\frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $R=a$.

Câu 26. Hai chiếc tàu thủy P và Q trên biển cách nhau $100m$ và thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $BPA=15^\circ$ và $BQA=55^\circ$. Tính chiều cao của tháp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Trả lời: $\approx 33m$

Lời giải

$\frac{BQ}{PQ}=\frac{\sin BPQ}{\sin PBQ}=\frac{\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}\Rightarrow BQ=\frac{PQ\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}.$

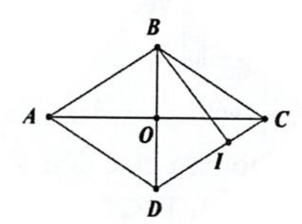
$\frac{AB}{BQ}=\sin 55^\circ\Rightarrow AB=BQ\sin 55^\circ=\frac{PQ\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}\cdot\sin 55^\circ\approx 33m.$

Câu 27. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có cạnh bằng a và $ABD=60^\circ$. Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BI}$.

Trả lời: $\frac{a^2}{2}$

Lời giải

Do $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng a và $ABD = 60^\circ$ nên ABD và BCD là các tam giác đều cạnh a.



Ta có:

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DI}) = \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AO}\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot a\cdot\cos 30^\circ = \frac{a^2}{2}$$

Câu 28. Cho ΔABC đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $MA^2 + MB^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời: $R = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB. Đưa về vectơ bằng cách chèn điểm I vào tính ra

$$2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 18 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy quỷ tích điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Câu 29. Cho ΔABC đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời: $R = \sqrt{2}$

Lời giải

Gọi G là trong tâm tam giác ABC suy ra $GA = GB = GC = \sqrt{3}$

Chèn G vào biến đổi suy ra $3ME^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 18 \Leftrightarrow ME^2 = 2 \Leftrightarrow ME = \sqrt{2}$

Vậy quỷ tích điểm M là đường tròn tâm E bán kính $R = \sqrt{2}$.

Câu 30. Cho ΔABC đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời: $R = \dfrac{\sqrt{183}}{8}$

Lời giải

Gọi N là điểm thỏa mãn $2\cdot\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ và D là trung điểm BC. Suy ra N là trung điểm $AD.NA=ND=AD:2=\dfrac{3\sqrt{3}}{4};NB=NC=\dfrac{\sqrt{39}}{4}$;

Chèn N vào đề ta được $4MN^2+2NA^2+NB^2+NC^2=18$ suy ra $MN=\dfrac{\sqrt{183}}{8}$

Vậy tập hợp điểm M thỏa đường tròn tâm N bán kính $R=MN=\dfrac{\sqrt{183}}{8}$

Câu 31. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC và H là trực tâm. Biết $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=kBC^2$. Khi đó $k=?$

Trả lời: $\frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có M là trung điểm BC

$$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\overrightarrow{HM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{HM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HC})$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HC})=\frac{1}{4}[\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BC})]$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC})$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\cdot)=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2=\frac{1}{4}BC^2$$

Câu 32. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$. Tính $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Trả lời: 0

Lời giải

$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AD}^2$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{BC}^2=0$$

$$\Leftrightarrow(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})=0$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{BD}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{DB}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC})=0$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC})=0$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}\cdot2\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$