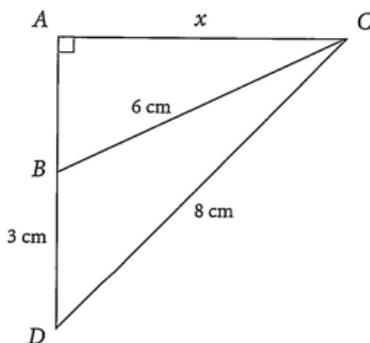


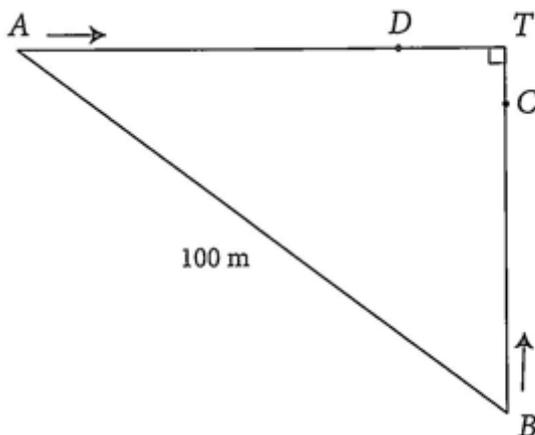
CÂU HỎI

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 6\text{ cm}$. Điểm D nằm trên tia AB sao cho $DB = 3\text{ cm}, DC = 8\text{ cm}$ (xem hình vẽ). Đặt $AC = x$. Tính diện tích tam giác BCD (làm tròn kết quả đến hàng phân mười).



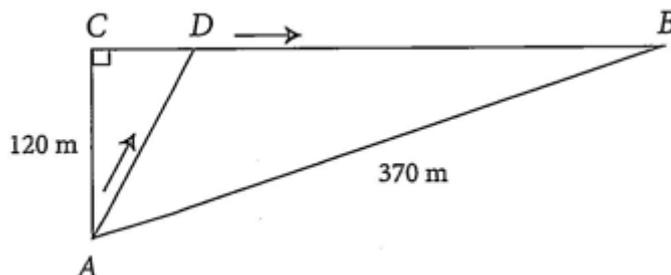
Trả lời:

Câu 2. Lúc 8 giờ sáng, hai ô tô cùng xuất phát tại vị trí A và vị trí B cách nhau 100 km chạy về thành phố T . Vận tốc của hai ô tô chạy từ vị trí A và vị trí B lần lượt là 55 km/h và 45 km/h . Biết rằng tại thời điểm ô tô đi từ vị trí A đến địa điểm D cách thành phố T 14 km thì ô tô đi từ vị trí B đến địa điểm C cách thành phố T là 6 km . Hỏi thời điểm đó là mấy giờ?



Trả lời:

Câu 3. Một chú thỏ ngày nào cũng ra bờ suối ở vị trí A , cách cửa hang của mình tại vị trí B là 370 m để uống nước, sau đó chú thỏ sẽ đến vị trí C cách vị trí A 120 m để ăn cỏ rồi trở về hang. Tuy nhiên, hôm nay sau khi uống nước ở bờ suối, chú thỏ không đến vị trí C như mọi ngày mà chạy đến vị trí D để tìm cà rốt rồi mới trở về hang (xem hình bên dưới). Biết rằng, tổng thời gian chú thỏ chạy từ vị trí A đến vị trí D rồi về hang là 30 giây (không kể thời gian tìm cà rốt), trên đoạn AD chú thỏ chạy với vận tốc là 13 m/s , trên đoạn BD chú thỏ chạy với vận tốc là 15 m/s . Tính khoảng cách giữa hai vị trí C và D .



Trả lời:

Câu 4. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{x^2 - 4x - 1} - |2x + 1| = 1$

Trả lời:

Câu 5. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{2x^2 - |x| + 3} = -x + 5$.

Trả lời:

Câu 6. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = |x - 2|$;

Trả lời:

Câu 7. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = x + \frac{1}{4}$.

Trả lời:

Câu 8. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$;

Trả lời:

Câu 9. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $(x + 1)(x + 4) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$

Trả lời:

Câu 10. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x} = \sqrt{(3 + x)(6 - x)} + 3$;

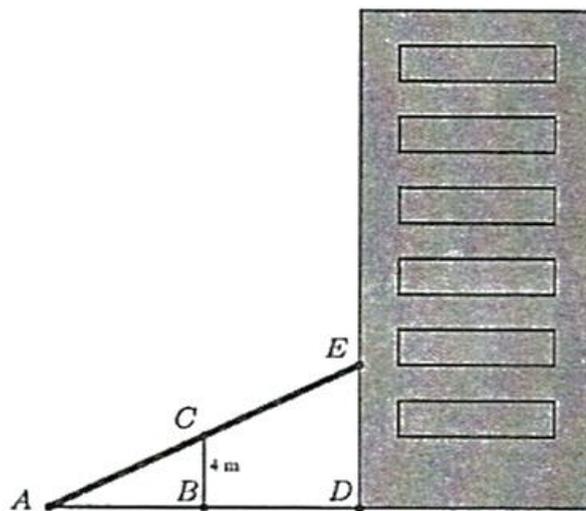
Trả lời:

Câu 11. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt[3]{x + 7} = 1 + \sqrt{x}$.

Trả lời:

Câu 12. Người ta làm ra một cái thang bắc lên tầng hai của một ngôi nhà (hình vẽ), muốn vậy họ cần làm một thanh đỡ BC có chiều dài bằng $4m$, đồng thời muốn đảm bảo kỹ thuật thì tỉ số độ

dài $\frac{CE}{BD} = \frac{5}{3}$. Hỏi vị trí A cách vị trí B bao nhiêu mét?



Trả lời:

Câu 13. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$;

Trả lời:

Câu 14. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $2\sqrt{x + 2} + 2\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 1} = 4$.

Trả lời:

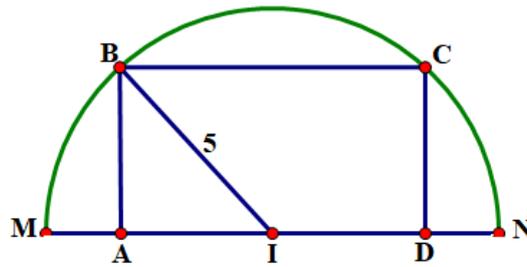
Câu 15. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x-12 + 2\sqrt{x^2-16}$;

Trả lời:

Câu 16. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$.

Trả lời:

Câu 17. Xét nửa đường tròn đường kính $MN = 10$. Xét điểm B (không trùng hai điểm M, N) di động trên nửa đường tròn và hình chiếu của B trên đoạn MN là điểm A , vẽ hình chữ nhật $ABCD$ với C cũng thuộc nửa đường tròn. Tìm độ dài IA biết rằng chu vi hình chữ nhật $ABCD$ bằng 22.



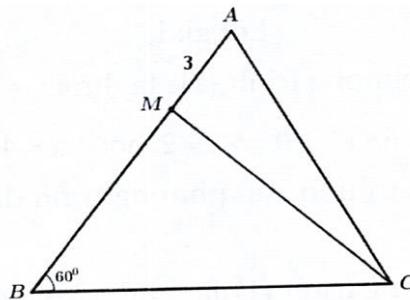
Trả lời:

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{2x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 + mx + m - 1}.$$

Trả lời:

Câu 19. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = 10$, góc ABC bằng 60° . Trên cạnh AB ta lấy điểm M sao cho $AM = 3$ (như hình vẽ).



Tính độ dài đoạn thẳng BM biết rằng $CM = \frac{8}{9}CA$ (đáp số gần đúng đến hàng phần trăm).

Trả lời:

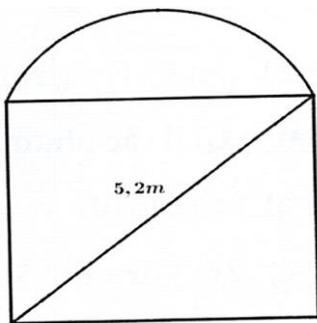
Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x - 2m} = x - 2$ có nghiệm.

Trả lời:

Câu 21. Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 2mx - 4} = x - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình đã cho có nghiệm.

Trả lời:

Câu 22. Ông An muốn làm cái cửa bằng nhôm có dạng nửa hình tròn ở phía trên và phía dưới có dạng hình chữ nhật như hình vẽ. Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và đường chéo của hình chữ nhật có độ dài 5,2 mét; diện tích của nửa hình tròn bằng $\frac{3}{10}$ diện tích của phần hình chữ nhật.



Tính số tiền ông An phải trả cho biết $1m^2$ cửa có giá 1300000 đồng (kết quả lấy gần đúng đến hàng phần mười).

Trả lời:

Câu 23. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + mx + m + 1}.$$

Trả lời:

Câu 24. Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm phân biệt.

Trả lời:

Câu 25. Tìm điều kiện của m để phương trình $\sqrt{x^2 + 2x - m} = 2x - 1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

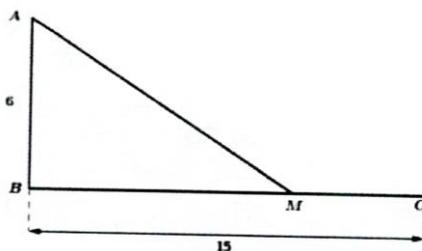
Trả lời:

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình: $\sqrt{2x^2 + mx + 5} - x = 3$ có đúng một nghiệm.

Trả lời:

Câu 27. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng cách $AB = 6km$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là $15km$.

Để nhận lương thực và các nhu yếu phẩm mỗi tháng người canh hải đăng phải đi xuống máy từ A đến bến tàu M trên bờ biển với vận tốc $10km/h$ rồi đi xe gắn máy đến C với vận tốc $30km/h$ (xem hình vẽ).

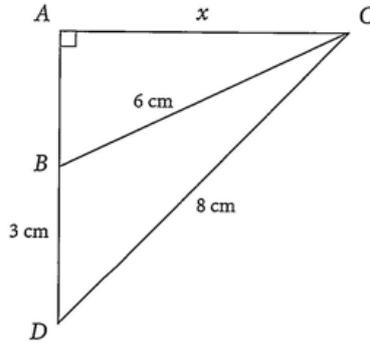


Tính tổng quãng đường người đó phải đi biết rằng thời gian đi từ A đến C là 1h14 phút.

Trả lời:

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 6\text{ cm}$. Điểm D nằm trên tia AB sao cho $DB = 3\text{ cm}, DC = 8\text{ cm}$ (xem hình vẽ). Đặt $AC = x$. Tính diện tích tam giác BCD (làm tròn kết quả đến hàng phân mười).



Trả lời: $7,65(\text{ cm}^2)$

Lời giải

Áp dụng định lí Pytago cho tam giác ABC vuông tại A , ta được: $AC^2 + AB^2 = BC^2$.

Suy ra $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{6^2 - x^2} = \sqrt{36 - x^2}(\text{ cm})$.

Áp dụng định lí Pytago cho tam giác ACD vuông tại A , ta được: $AC^2 + AD^2 = CD^2$.

Suy ra $AD = \sqrt{CD^2 - AC^2} = \sqrt{8^2 - x^2} = \sqrt{64 - x^2}(\text{ cm})$.

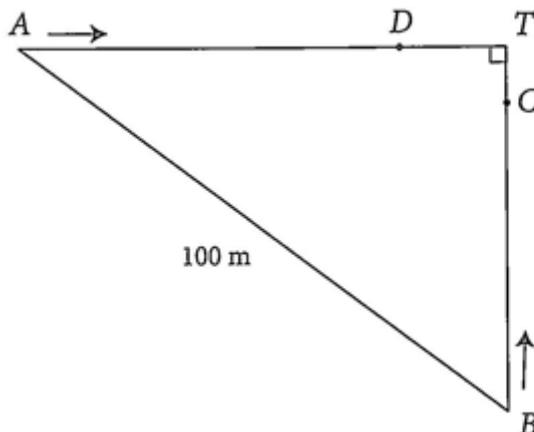
Mà $AB + BD = AD$ nên $\sqrt{36 - x^2} + 3 = \sqrt{64 - x^2}$ (1).

Bình phương hai vế của phương trình (1), ta được:

$$36 - x^2 + 6\sqrt{36 - x^2} + 9 = 64 - x^2 \Rightarrow \sqrt{36 - x^2} = \frac{19}{6} \Rightarrow x^2 = \frac{935}{36} \Rightarrow x \approx 5,1.$$

Diện tích của tam giác BCD là: $\frac{1}{2} \cdot 5,1 \cdot 3 = 7,65(\text{ cm}^2)$.

Câu 2. Lúc 8 giờ sáng, hai ô tô cùng xuất phát tại vị trí A và vị trí B cách nhau 100 km chạy về thành phố T . Vận tốc của hai ô tô chạy từ vị trí A và vị trí B lần lượt là 55 km/h và 45 km/h . Biết rằng tại thời điểm ô tô đi từ vị trí A đến địa điểm D cách thành phố T 14 km thì ô tô đi từ vị trí B đến địa điểm C cách thành phố T là 6 km . Hỏi thời điểm đó là mấy giờ?



Trả lời: 9 giờ 12 phút (sáng).

Lời giải

Gọi x (giờ) là thời gian ô tô đi từ vị trí A đến địa điểm $D(x > 0)$. Vì hai ô tô xuất phát cùng một lúc nên thời gian ô tô đi từ vị trí B đến địa điểm C cũng là x giờ.

Do đó, quãng đường AD và BC lần lượt là $55x(km)$ và $45x(km)$.

Suy ra khoảng cách từ vị trí A và vị trí B đến thành phố T lần lượt là $55x+14(km)$ và $45x+6(km)$.

Vì khoảng cách giữa hai vị trí A và B là $100km$ nên ta có phương trình:

$$\sqrt{(55x+14)^2 + (45x+6)^2} = 100 \Rightarrow 5050x^2 + 2080x + 232 = 10000.$$

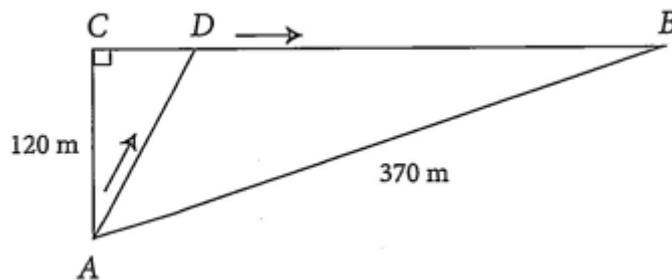
Giải phương trình này và kết hợp với điều kiện $x > 0$, ta nhận $x = \frac{6}{5}$.

Đổi: $\frac{6}{5}$ giờ = 1 giờ 12 phút.

Vậy thời điểm ô tô đi từ vị trí A đến địa điểm D là:

8 giờ + 1 giờ 12 phút = 9 giờ 12 phút (sáng).

Câu 3. Một chú thỏ ngày nào cũng ra bờ suối ở vị trí A , cách cửa hang của mình tại vị trí B là $370m$ để uống nước, sau đó chú thỏ sẽ đến vị trí C cách vị trí A $120m$ để ăn cỏ rồi trở về hang. Tuy nhiên, hôm nay sau khi uống nước ở bờ suối, chú thỏ không đến vị trí C như mọi ngày mà chạy đến vị trí D để tìm cà rốt rồi mới trở về hang (xem hình bên dưới). Biết rằng, tổng thời gian chú thỏ chạy từ vị trí A đến vị trí D rồi về hang là 30 giây (không kể thời gian tìm cà rốt), trên đoạn AD chú thỏ chạy với vận tốc là $13m/s$, trên đoạn BD chú thỏ chạy với vận tốc là $15m/s$. Tính khoảng cách giữa hai vị trí C và D .



Trả lời: 50(m)

Lời giải

Gọi thời gian chú thỏ chạy trên đoạn AD là $x(0 < x < 30)$ (giây), khi đó thời gian

chú thỏ chạy trên đoạn BD là $30-x$ (giây). Do đó, quãng đường AD và BD lần lượt là $13x(m)$ và $15(30-x)(m)$.

Độ dài quãng đường BC là: $\sqrt{370^2 - 120^2} = 350(m)$.

Tam giác ACD vuông tại C nên $CD = \sqrt{(13x)^2 - 120^2} (m)$.

Mặt khác, $CD = BC - BD = 350 - 15(30 - x)(m)$.

Do đó, ta có: $\sqrt{(13x)^2 - 120^2} = 350 - 15(30 - x)$.

Giải phương trình này và kết hợp với điều kiện $0 < x < 30$, ta nhận $x = 10$ (giây).

Vậy khoảng cách giữa vị trí C và vị trí D là: $350 - 15 \cdot (30 - 10) = 50(m)$.

Câu 4. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{x^2 - 4x - 1} - |2x + 1| = 1$

Trả lời: $S = \left\{ \frac{-6 + \sqrt{21}}{3}; -1 \right\}$

Lời giải

Trường hợp 1: Với $2x + 1 \geq 0$ hay $x \geq -\frac{1}{2}$, phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt{x^2 - 4x - 1} - (2x + 1) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 1} = 2x + 2 \quad (1)$$

Bình phương hai vế của phương trình (1), ta được:

$$x^2 - 4x - 1 = 4x^2 + 8x + 4 \Rightarrow 3x^2 + 12x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3} \text{ hoặc } x = \frac{-6 - \sqrt{21}}{3}.$$

Mà $x \geq -\frac{1}{2}$ nên ta nhận $x = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3}$.

Thay $x = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3}$ vào phương trình đã cho, ta thấy giá trị này thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $2x + 1 < 0$ hay $x < -\frac{1}{2}$, phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{x^2 - 4x - 1} + 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 1} = -2x. \quad (2)$$

Bình phương hai vế của phương trình (2), ta được:

$$x^2 - 4x - 1 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{3} \text{ hoặc } x = -1.$$

Mà $x < -\frac{1}{2}$ nên ta nhận $x = -1$.

Thay $x = -1$ vào phương trình đã cho, ta thấy giá trị này thoả mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{-6 + \sqrt{21}}{3}; -1 \right\}$.

Câu 5. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{2x^2 - |x| + 3} = -x + 5$.

Trả lời: $S = \left\{ 2; \frac{-11 - \sqrt{209}}{2} \right\}$

Lời giải

Trường hợp 1: Với $x \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{2x^2 - x + 3} = -x + 5. (1)$$

Bình phương hai vế của phương trình (1), ta được:

$$2x^2 - x + 3 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 + 9x - 22 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -11.$$

Mà $x \geq 0$ nên ta nhận $x = 2$.

Thay $x = 2$ vào phương trình đã cho, ta thấy giá trị này thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $x < 0$, phương trình trở thành

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} = -x + 5. (2)$$

Bình phương hai vế của phương trình (2), ta được:

$$2x^2 + x + 3 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 + 11x - 22 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-11 + \sqrt{209}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-11 - \sqrt{209}}{2}.$$

Mà $x < 0$ nên ta nhận $x = \frac{-11 - \sqrt{209}}{2}$.

Thay $x = \frac{-11 - \sqrt{209}}{2}$ vào phương trình đã cho, ta thấy giá trị này thoả mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ 2; \frac{-11 - \sqrt{209}}{2} \right\}$.

Câu 6. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = |x - 2|$;

Trả lời: $S = \left\{ -3; \frac{7}{2} \right\}$

Lời giải:

Cách giải 1:

Bình phương hai vế phương trình, ta có:

$$3x^2 - 9x - 5 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{7}{2}.$$

Thay $x = -3$ vào phương trình, ta được: $\sqrt{49} = |-7|$ (thoả mãn).

Thay $x = \frac{7}{2}$ vào phương trình, ta được: $\frac{1}{2} = \left| -\frac{1}{2} \right|$ (thoả mãn).

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \left\{-3; \frac{7}{2}\right\}$.

Cách giải 2:

Ta có: $\sqrt{3x^2 - 9x - 5} = |x - 4| \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 4| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 3x^2 - 9x - 5 = x^2 - 8x + 16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{7}{2}$$

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \left\{-3; \frac{7}{2}\right\}$.

Câu 7. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = x + \frac{1}{4}$.

Trả lời: vô nghiệm.

Lời giải:

Ta có: $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x-1 + 2\sqrt{x-1} + 1} = x + \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 = x + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = x - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{4} \geq 0 \\ x - 1 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 8. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$;

Trả lời: $S = \{1; 2\}$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 3} (t \geq 0)$, suy ra $t^2 = x^2 - 3x + 3 \Rightarrow t^2 - 3 = x^2 - 3x$.

Phương trình trở thành:

$$t + \sqrt{(t^2 - 3) + 6} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 3} = 3 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t^2 + 3 = 9 - 6t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Với $t = 1$ thì $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$.

Câu 9. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $(x+1)(x+4) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$

Trả lời: $S = \{2; -7\}$

Lời giải

$$(x+1)(x+4) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6 \Leftrightarrow x^2+5x-2-3\sqrt{x^2+5x+2} = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+5x+2} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = x^2+5x+2 \Rightarrow t^2-2 = x^2+5x.$$

$$\text{Phương trình trở thành: } (t^2-2)-2-3t = 0 \Leftrightarrow t^2-3t-4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (l)} \\ t = 4 \end{cases} \text{ Với } t = 4 \text{ thì}$$

$$\sqrt{x^2+5x+2} = 4 \Leftrightarrow x^2+5x+2 = 16 \Leftrightarrow x^2+5x-14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{2; -7\}$.

Câu 10. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = \sqrt{(3+x)(6-x)} + 3$;

Trả lời: $S = \{-3; 6\}$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} (t \geq 0)$$

$$\Rightarrow t^2 = (3+x) + (6-x) + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \Rightarrow \frac{t^2-9}{2} = \sqrt{(3+x)(6-x)}.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } t = \frac{t^2-9}{2} + 3 \Leftrightarrow t^2-2t-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (l)} \\ t = 3 \text{ (n)} \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = 3 \text{ thì } \frac{3^2-9}{2} = \sqrt{(3+x)(6-x)} \Leftrightarrow (3+x)(6-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-3; 6\}$.

Câu 11. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt[3]{x+7} = 1 + \sqrt{x}$.

Trả lời: $S = \{1\}$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{x+7} \Rightarrow t^3 = x+7 \Rightarrow t^3-7 = x.$$

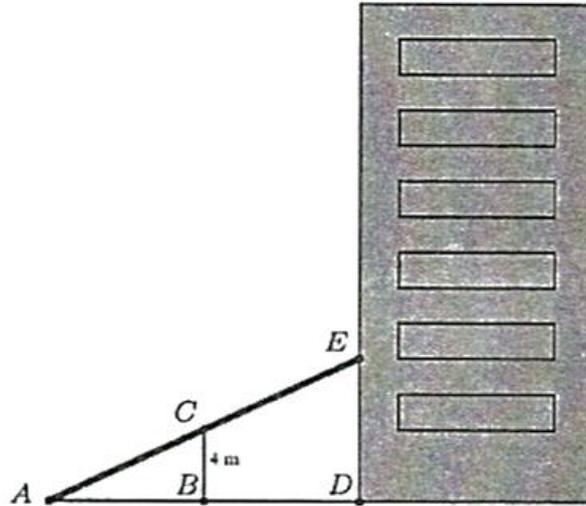
$$\text{Phương trình trở thành: } t = 1 + \sqrt{t^3-7} \Leftrightarrow \sqrt{t^3-7} = t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 \geq 0 \\ t^3-7 = t^2-2t+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t^3-t^2+2t-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ (t-2)(t^2+t+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ thì } 2^3-7 = x \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{1\}$.

Câu 12. Người ta làm ra một cái thang bắc lên tầng hai của một ngôi nhà (hình vẽ), muốn vậy họ cần làm một thanh đỡ BC có chiều dài bằng $4m$, đồng thời muốn đảm bảo kỹ thuật thì tỉ số độ dài $\frac{CE}{BD} = \frac{5}{3}$. Hỏi vị trí A cách vị trí B bao nhiêu mét?



Trả lời: $3m$

Lời giải:

Đặt $AB = x > 0$. Xét tam giác ABC vuông tại B có: $AC = \sqrt{x^2 + 4}$.

Theo tính chất định lí Ta-lét, ta có: $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{x} = \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 16} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq 0 \\ 9(x^2 + 16) = 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 16x^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy hai vị trí A, B cách nhau $3m$.

Câu 13. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$;

Trả lời: $S = \{1\}$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{6x^2 - 12x + 7} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 6(x^2 - 2x) + 7 \Rightarrow \frac{t^2 - 7}{6} = x^2 - 2x$.

Với $t = 1$ thì $\frac{1^2 - 7}{6} = x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \{1\}$.

Câu 14. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$.

Trả lời: $S = \{3\}$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+1} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1$.

Thay vào phương trình, ta có:

$$2\sqrt{(t^2-1)} + 2 + 2t - t = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+2t+1} - t = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{(t+1)^2} - t = 4$$

$$\Leftrightarrow 2|t+1| - t = 4 \Leftrightarrow 2(t+1) - t = 4 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (n)}.$$

Với $t = 2$ thì $x = 2^2 - 1 = 3$. Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \{3\}$.

Câu 15. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x - 12 + 2\sqrt{x^2-16}$;

Trả lời: $S = \{5\}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 4$. Đặt $t = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}$ ($t \geq 0$)

$$\Rightarrow t^2 = x+4 + x-4 + 2\sqrt{(x-4)(x+4)} = 2x + 2\sqrt{x^2-16}.$$

Phương trình trở thành: $t = t^2 - 12 \Leftrightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \text{ (lo?i)} \\ t = 4 \text{ (nh?n)} \end{cases}$

Với $t = 4$ thì $4^2 = 2x + 2\sqrt{x^2-16} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-16} = 8 - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-x \geq 0 \\ x^2-16 = 64-16x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S = \{5\}$.

Câu 16. Tìm tập nghiệm phương trình sau: $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$.

Trả lời: $S = \{-2\}$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[3]{3x-2} \Rightarrow t^3 = 3x-2 \Rightarrow \frac{t^3+2}{3} = x$.

Phương trình trở thành: $2t + 3\sqrt{6-5 \cdot \frac{t^3+2}{3}} - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{8-5t^3}{3}} = 8-2t \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2t \geq 0 \\ 9 \cdot \frac{8-5t^3}{3} = 64-32t+4t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 24-15t^3 = 64-32t+4t^2 \end{cases}$$

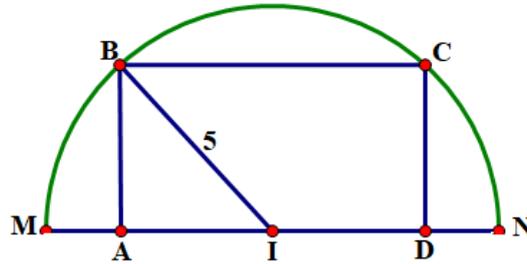
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 15t^3 + 4t^2 - 32t + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ 15t^3 + 4t^2 - 32t + 40 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ (t+2)(15t^2-26t+20) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2.$$

Với $t = -2$ thì $x = \frac{(-2)^3+2}{3} = -2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-2\}$.

Câu 17. Xét nửa đường tròn đường kính $MN = 10$. Xét điểm B (không trùng hai điểm M, N) di động trên nửa đường tròn và hình chiếu của B trên đoạn MN là điểm A , vẽ hình chữ nhật $ABCD$ với C cũng thuộc nửa đường tròn. Tìm độ dài IA biết rằng chu vi hình chữ nhật $ABCD$ bằng 22.



Trả lời: bằng 4 hoặc bằng $\frac{24}{5}$

Lời giải

Đặt $IA = x \in (0;5) \Rightarrow AD = 2x$.

Xét tam giác IAB vuông tại A , ta có: $AB = \sqrt{5^2 - x^2}$.

Chu vi hình chữ nhật $ABCD$ là:

$$2AB + 2AD = 4x + 2\sqrt{5^2 - x^2} = 22 \Leftrightarrow \sqrt{25 - x^2} = 11 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 2x \geq 0 \\ 25 - x^2 = 121 - 44x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{11}{2} \\ 5x^2 - 44x + 96 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{11}{2} \\ x = 4 \vee x = \frac{24}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = \frac{24}{5}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai điểm I, A bằng 4 hoặc bằng $\frac{24}{5}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{2x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 + mx + m - 1}.$$

Trả lời: $m \in (-\infty; -1 - 2\sqrt{2}] \cup [-1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{2x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 + mx + m - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 1 = x^2 + mx + m - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x^2 + (1 - m)x + 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Dễ thấy $2x^2 + x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

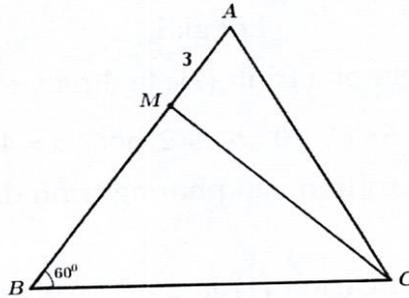
Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = (1 - m)^2 - 4(2 - m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq -1 + 2\sqrt{2} \vee m \leq -1 - 2\sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $m \in (-\infty; -1 - 2\sqrt{2}] \cup [-1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 19. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = 10$, góc ABC bằng 60° . Trên cạnh AB ta lấy điểm M sao cho $AM = 3$ (như hình vẽ).



Tính độ dài đoạn thẳng BM biết rằng $CM = \frac{8}{9}CA$ (đáp số gần đúng đến hàng phần trăm).

Trả lời: $BM \approx 25,59$ hoặc $BM \approx 6,99$.

Lời giải

Đặt $BM = x (x \geq 0)$.

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{AN^2 + NC^2 - 2AN \cdot NC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{x^2 + 100 - 10x}$$

$$\begin{aligned} CM &= \sqrt{BM^2 + BC^2 - 2BM \cdot BC \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{(x+3)^2 + 100 - 10(x+3)} \\ &= \sqrt{x^2 - 4x + 79} \end{aligned}$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } AC = \frac{8}{9}BC \Rightarrow \sqrt{x^2 - 10x + 100} = \frac{8}{9}\sqrt{x^2 - 4x + 79}$$

$$\Rightarrow 81(x^2 - 10x + 100) = 64(x^2 - 4x + 79)$$

$$\Rightarrow 17x^2 - 554x + 3044 = 0 \Rightarrow x \approx 25,59 \text{ hoặc } x \approx 6,99.$$

Vậy $BM \approx 25,59$ hoặc $BM \approx 6,99$.

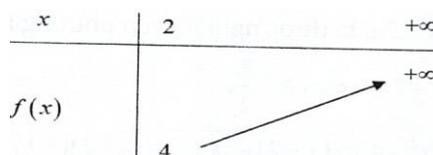
Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x - 2m} = x - 2$ có nghiệm.

Trả lời: $m \geq 2$

Lời giải

$$\sqrt{2x^2 - 2x - 2m} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 2x - 2m = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 2x - 4 = 2m(*) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x - 4, (x \geq 2)$



Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $x \geq 2 \Leftrightarrow 2m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 21. Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 2mx - 4} = x - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình đã cho có nghiệm.

Trả lời: $m \in [-1; +\infty)$

Lời giải

$$\sqrt{2x^2 - 2mx - 4} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 2mx - 4 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2(m-1)x - 5 = 0(*) \end{cases}$$

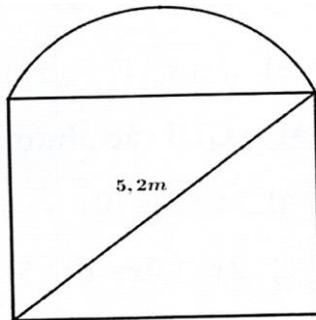
Do pt (*) có $ac = -5 < 0$ nên pt (*) luôn có 2 nghiệm trái dấu.

Nên để pt đã cho có nghiệm thì pt (*) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 \leq x_2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -5 - 2(m-1) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $m \in [-1; +\infty)$.

Câu 22. Ông An muốn làm cái cửa bằng nhôm có dạng nửa hình tròn ở phía trên và phía dưới có dạng hình chữ nhật như hình vẽ. Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và đường chéo của hình chữ nhật có độ dài 5,2 mét; diện tích của nửa hình tròn bằng $\frac{3}{10}$ diện tích của phần hình chữ nhật.



Tính số tiền ông An phải trả cho biết $1m^2$ cửa có giá 1300000 đồng (kết quả lấy gần đúng đến hàng phần mười).

Trả lời: 22230000 (đồng).

Lời giải

Gọi $x(m) (x > 0)$ là đường kính của nửa đường tròn.

Khi đó hình chữ nhật có hai kích thước là x và $\sqrt{5,2^2 - x^2}$.

Diện tích nửa hình tròn là $\frac{\pi x^2}{8}$ và diện tích hình chữ nhật là $x\sqrt{5,2^2 - x^2}$.

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \frac{\pi x^2}{8} = \frac{3}{10} x \sqrt{5,2^2 - x^2} \Leftrightarrow \frac{5}{12} \pi x = \sqrt{5,2^2 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{144} \pi^2 x^2 = \frac{676}{25} - x^2 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{25}{144} \pi^2 + 1 \right) = \frac{676}{25} \Leftrightarrow x \approx 3,2(m).$$

Diện tích cánh cửa là: $\frac{\pi \cdot 3,2^2}{8} + 3,2\sqrt{5,2^2 - 3,2^2} \approx 17,1(m^2)$.

Do đó số tiền ông An phải trả là: $1300000 \cdot 17,1 = 22230000$ (đồng).

Câu 23. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + mx + m + 1}.$$

Trả lời: $m < 3 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m > 3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

$$\text{pt} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x^2 + x + 1 = 2x^2 + mx + m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 \geq 0 \\ x^2 + (m-1)x + m = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < 3 - 2\sqrt{2}$ hoặc $m > 3 + 2\sqrt{2}$.

Câu 24. Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm phân biệt.

Trả lời: $m \geq \frac{9}{2}$

Lời giải

$$\cdot \text{Pt} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2 + (4-m)x - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}.$$

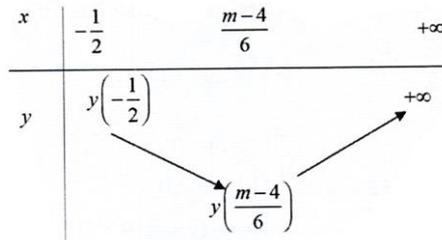
Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng $-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = 3x^2 + (4-m)x - 1$ trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Xét hàm số $y = 3x^2 + (4-m)x - 1$ trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{m-4}{6}$

+ TH1: Nếu $\frac{m-4}{6} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m \leq 1$ thì hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ nên $m \leq 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH2: Nếu $\frac{m-4}{6} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m > 1$:

Ta có bảng biến thiên



Suy ra đồ thị hàm số $y = 3x^2 + (4-m)x - 1$ trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow y\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0 > y\left(\frac{m-4}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{2m-9}{4} \geq 0 > \frac{1}{12}(-m^2 + 8m - 28) \quad (1)$$

Vì $-m^2 + 8m - 28 = -(m-4)^2 - 12 < 0, \forall m$ nên (1) $\Leftrightarrow 2m - 9 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}$ (thỏa mãn $m > 1$)

Vậy $m \geq \frac{9}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 25. Tìm điều kiện của m để phương trình $\sqrt{x^2 + 2x - m} = 2x - 1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

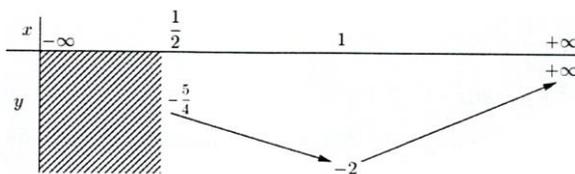
Trả lời: $\frac{5}{4} \leq m < 2$

Lời giải

$$\sqrt{x^2 + 2x - m} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x - m = (2x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 6x + 1 = -m(*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $-2 < -m \leq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \leq m < 2$.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình: $\sqrt{2x^2 + mx + 5} - x = 3$ có đúng một nghiệm.

Trả lời: $m > \frac{23}{3}$

Lời giải

Ta có $\sqrt{2x^2 + mx + 5} - x = 3$ (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 5} = x + 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 2x^2 + mx + 5 = (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + (m-6)x - 4 = 0 \end{cases}$$

Vì phương trình (2) có $a.c = -4 < 0$ nên luôn có hai nghiệm $x_1 < 0 < x_2$.

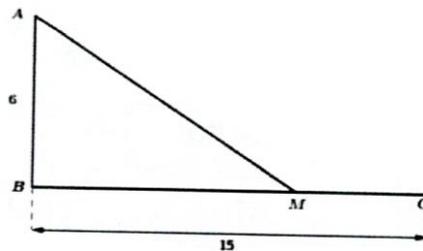
Vì $x_2 \geq -3$ nên x_2 là một nghiệm của (1). Do đó để (1) có nghiệm duy nhất thì

$$x_1 < -3 \Leftrightarrow \frac{-m+6-\sqrt{\Delta}}{2} < -3 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} > 12-m.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 12m + 52} > 12 - m \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - m < 0 \\ 12 - m \geq 0 \\ m^2 - 12m + 52 > (12 - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 12 \\ m \leq 12 \\ m > \frac{23}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{23}{3}.$$

Câu 27. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng cách . $AB = 6km$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là $15km$.

Để nhận lương thực và các nhu yếu phẩm mỗi tháng người canh hải đăng phải đi xuống máy từ A đến bến tàu M trên bờ biển với vận tốc $10km/h$ rồi đi xe gắn máy đến C với vận tốc $30km/h$ (xem hình vẽ).



Tính tổng quãng đường người đó phải đi biết rằng thời gian đi từ A đến C là 1h14 phút.

Trả lời: 17(km)

Lời giải

Ta có 1h14 phút = $\frac{37}{30}$ (h). Gọi $AM = x(km)(x > 6)$ Suy ra thời gian đi từ A đến M là $\frac{x}{10}$ (h). Khi

đó $BM = \sqrt{x^2 - 36}$ và $CM = 15 - \sqrt{x^2 - 36}$.

Thời gian đi từ M đến C là $\frac{15 - \sqrt{x^2 - 36}}{30}$.

Theo giả thiết ta có phương trình: $\frac{x}{10} + \frac{15 - \sqrt{x^2 - 36}}{30} = \frac{37}{30}$.

Giải phương trình ta được $x = 10(km)$

Do đó tổng quãng đường phải đi là $AM + MC = 10 + (15 - \sqrt{10^2 - 36}) = 17(km)$

