

Câu 1. Cho tam giác ABC có $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh AB . Đường trung tuyến và đường cao kẻ từ A lần lượt có phương trình là $7x - 2y - 3 = 0$ và $6x - y - 4 = 0$. Lập phương trình của đường thẳng AB .

Trả lời:

Lời giải

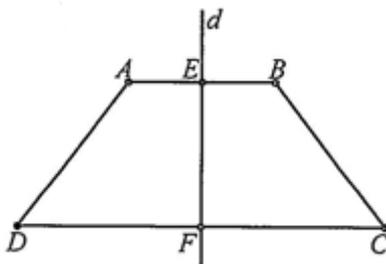
Tọa độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ 6x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Do đó, điểm A có tọa độ $(1;2)$. Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM}(1;-2)$ nên nhận $\vec{n}(2;1)$ là một vectơ pháp tuyến. Phương trình đường thẳng AB là:
 $2(x-1) + (y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-3;1), B(1;3), C(7;1)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy AB, CD .

Trả lời:

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4;2)$. Lấy E là trung điểm AB ta được $E(-1;2)$. Đường trung trực d của cạnh AB có phương trình là: $2x + y = 0$.

Đường thẳng CD đi qua C và song song với AB có phương trình là: $x - 2y - 5 = 0$

Giao điểm F của hai đường thẳng CD và d có tọa độ là $(1;-2)$. Vì tứ giác $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy AB, CD nên D là điểm đối xứng với C qua d , do đó \vec{F} là trung điểm của đoạn CD . Suy ra $D(-5;-5)$. Nhận thấy, $\overrightarrow{DC} = (12;6)$, $\overrightarrow{AB} = (4;2)$ cùng hướng nên $D(-5;-5)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;2), B(1;5)$ và đỉnh C nằm trên đường thẳng $d: 2x - y - 8 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C , biết rằng C có tung độ âm và diện tích tam giác ABC bằng 2.

Trả lời:

Lời giải

Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x + y - 8 = 0$. C nằm trên đường thẳng d nên giả sử $C(t; 2t-8)$.

Ta có: $AB = \sqrt{(1-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}$. Do $S_{\triangle ABC} = 2$ suy ra $d(C, AB) = \frac{4}{\sqrt{10}}$. Khi đó

$$\frac{|3t + (2t-8) - 8|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |5t - 16| = 4. \text{ Suy ra } t = 4 \text{ hoặc } t = \frac{12}{5}. \text{ Với } t = 4 \text{ thì } 2t - 8 = 0 \text{ (loại vì } C \text{ có}$$

tung độ âm). Với $t = \frac{12}{5}$ thì $2t - 8 = \frac{-16}{5}$. Vậy $C\left(\frac{12}{5}; \frac{-16}{5}\right)$.

Câu 4. Lập phương trình đường thẳng đi qua $A(2;3)$ và tạo với đường thẳng $d: 2x + y - 4 = 0$ một góc bằng 45° .

Trả lời:

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\Delta = (a; b) (a^2 + b^2 > 0)$. Ta có:

$$(\Delta, d) = 45^\circ \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n}_\Delta, \vec{n}_d) \right| = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_\Delta \cdot \vec{n}_d|}{|\vec{n}_\Delta| \cdot |\vec{n}_d|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2|2a + b| = \sqrt{10} \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 3a^2 + 8ab - 3b^2 = 0.$$

Nếu $b = 0$ thì $a = 0$ (loại).

Nếu $b \neq 0$ thì chia cả hai vế phương trình trên cho b^2 ta có: $3\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 8 \cdot \frac{a}{b} - 3 = 0$

Giải phương trình ta được $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ hoặc $\frac{a}{b} = -3$. Với $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, ta chọn $a = 1, b = 3$. Suy ra phương trình đường thẳng d là: $1(x-2) + 3(y-3) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 11 = 0$

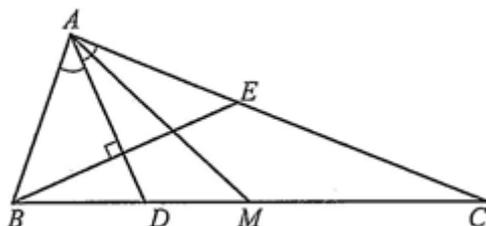
Với $\frac{a}{b} = -3$ ta chọn $a = -3, b = 1$. Suy ra phương trình đường thẳng d là:

$$-3(x-2) + 1(y-3) = 0 \Leftrightarrow -3x + y + 3 = 0.$$

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Gọi AM, AD lần lượt là đường trung tuyến và đường phân giác trong của tam giác. Các đường thẳng AM, AD lần lượt có phương trình là $x - y - 2 = 0, y = 0$. Giả sử $B(1;3)$. Viết phương trình đường thẳng AC và xác định tọa độ của điểm C .

Trả lời:

Lời giải



Tọa độ A là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} y=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0. \end{cases}$$

Suy ra $A(2;0)$. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AD thì ta có $E \in AC$ và $E(1;-3)$

Đường thẳng AC đi qua hai điểm A và E nên phương trình đường thẳng AC là:

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-0}{-3-0} \Leftrightarrow 3x-y-6=0$$

Điểm C thuộc đường thẳng AC , M là trung điểm BC nên giả sử $C(c;3c-6)$ và $M\left(\frac{c+1}{2}; \frac{3c-3}{2}\right)$

Điểm M thuộc đường thẳng AM nên $\frac{c+1}{2} - \frac{3c-3}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow c=0$. Vậy $C(0;-6)$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ và các điểm $M(0;2)$, $N(5;-3)$, $P(-2;-2)$, $Q(2;-4)$ lần lượt thuộc các đường thẳng chứa các cạnh AB, BC, CD, DA . Lập phương trình đường thẳng AB và tính diện tích hình vuông $ABCD$.

Trả lời:

Lời giải

Gọi $\vec{n}_{AB} = (a;b) (a^2 + b^2 > 0)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB . Đường thẳng AB đi qua $M(0;2)$ nên có phương trình dạng: $a(x-0) + b(y-2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 2b = 0$.

Đường thẳng BC vuông góc với AB nên ta có thể chọn $\vec{n}_{BC} = (b;-a)$ làm vectơ pháp tuyến của đường thẳng BC . Đường thẳng BC đi qua $N(5;-3)$ nên có phương trình dạng:

$$b(x-5) - a(y+3) = 0 \Leftrightarrow bx - ay - 5b - 3a = 0.$$

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $d(P, AB) = d(Q, BC)$. Do đó, ta có:

$$\frac{|-2a - 2b - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2b + 4a - 5b - 3a|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \Leftrightarrow |2a + 4b| = |a - 3b|.$$

Suy ra $a = -7b$ hoặc $3a = -b$

Với $a = -7b$ ta chọn $b=1, a=-7$. Suy ra phương trình đường thẳng AB là:

$$-7x + y - 2 = 0, d(P, AB) = \sqrt{2}$$

Vậy diện tích hình vuông $ABCD$ bằng: $(\sqrt{2})^2 = 2$

Với $3a = -b$ ta chọn $a=1, b=-3$. Suy ra phương trình đường thẳng AB là: $x - 3y + 6 = 0$

$$\text{và } d(P, AB) = \sqrt{10}$$

Vậy diện tích hình vuông $ABCD$ bằng $(\sqrt{10})^2 = 10$

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có $A(0;2), B(4;3)$, giao điểm hai đường chéo nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 3y = 0$. Tìm tọa độ điểm C và D .

Trả lời:

Lời giải

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Vì I thuộc Δ nên giả sử $I(3t;t)$.

Khi đó $\overrightarrow{IA} = (-3t; 2-t), \overrightarrow{IB} = (4-3t; 3-t)$.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow (-3t)(4-3t) + (2-t)(3-t) = 0 \Leftrightarrow 10t^2 - 17t + 6 = 0$

Suy ra $t = \frac{1}{2}$ hoặc $t = \frac{6}{5}$.

Với $t = \frac{1}{2}$ ta có: $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow C(3; -1), D(-1; -2)$

Với $t = \frac{6}{5}$ ta có: $I\left(\frac{18}{5}; \frac{6}{5}\right) \Rightarrow C\left(\frac{36}{5}; \frac{2}{5}\right), D\left(\frac{16}{5}; -\frac{3}{5}\right)$

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 4x - y + 11 = 0$.

a) Lập phương trình đường thẳng d_1 đi qua $M(-2; 1)$ và song song với d .

b) Lập phương trình đường thẳng d_2 vuông góc với d và cách đều hai điểm $P(-3; 3), Q(5; -1)$.

Trả lời:

Lời giải

a) Vì d_1 song song với d nên phương trình của d_1 có dạng: $4x - y + c = 0 (c \neq 11)$.

Vì M thuộc d_1 nên $4 \cdot (-2) - 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 9$.

Vậy phương trình đường thẳng d_1 là: $4x - y + 9 = 0$.

b) Vì d_2 vuông góc với d nên phương trình của d_2 có dạng: $x + 4y + m = 0$.

Vì d_2 cách đều hai điểm P, Q nên

$$d(P, d_2) = d(Q, d_2) \Leftrightarrow \frac{|-3 + 4 \cdot 3 + m|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{|5 + 4 \cdot (-1) + m|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} \Leftrightarrow |m + 9| = |m + 1|.$$

Suy ra $m = -5$. Vậy phương trình đường thẳng d_2 là: $x + 4y - 5 = 0$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 1), B(5; -2)$, đỉnh C thuộc đường thẳng $y - 4 = 0$, trọng tâm G thuộc đường thẳng $3x - 2y + 6 = 0$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G .

b) Tính diện tích tam giác ABC .

Trả lời:

Lời giải

a) Đỉnh C nằm trên đường thẳng $y - 4 = 0$ nên giả sử $C(c; 4)$. Giả sử $G(a; b)$. Vì G là trọng tâm

tam giác nên $a = \frac{6+c}{3}, b = 1$.

Do G nằm trên đường thẳng $3x - 2y + 6 = 0$ nên $3\left(\frac{6+c}{3}\right) - 2 + 6 = 0 \Leftrightarrow c = -10$. Suy ra $G\left(-\frac{4}{3}; 1\right)$.

b) Ta có: $\overline{AB} = (4; -3)$. Suy ra $AB = 5$ và phương trình đường thẳng AB là:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-3} \Leftrightarrow 3x + 4y - 7 = 0.$$

Từ câu a) ta có: $C(-10; 4)$.

Khoảng cách từ C đến đường thẳng AB là: $d(C, AB) = \frac{|3 \cdot (-10) + 4 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{21}{5}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, AB) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{21}{5} = \frac{21}{2}$.

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng 2. Biết $A(0; 2), B(3; 0)$ và giao điểm I của hai đường chéo hình bình hành nằm trên đường thẳng $y = -x$. Tìm tọa độ các điểm C và D .

Trả lời:

Lời giải

Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0$.

Điểm I nằm trên đường thẳng $y = -x$ nên giả sử $I(t; -t)$.

Vì I là trung điểm của AC nên $C(2t; -2t - 2)$, I là trung điểm của BD nên $D(2t - 3; -2t)$.

Ta có: $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{13}$. Suy ra $d(C, AB) = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Khi đó

$$\frac{|2 \cdot 2t + 3(-2t - 2) - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow |-2t - 12| = 2. \text{ Suy ra } t = -5 \text{ hoặc } t = -7. \text{ Với } t = -5, \text{ ta có:}$$

$C(-10; 8), D(-13; 10)$.

Với $t = -7$, ta có: $C(-14; 12), D(-17; 14)$.

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các đường thẳng $d_1: x + 2y + 3 = 0$, $d_2: 3x - y + 5 = 0$ và điểm $P(-2; 1)$. Đường thẳng Δ đi qua P và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho P là trung điểm của AB .

a) Tìm tọa độ các điểm A, B .

b) Tính khoảng cách từ $M(3; -2)$ đến đường thẳng Δ .

Trả lời:

Lời giải

a) Vì $A \in d_1, B \in d_2$ nên giả sử $A(-2t - 3; t), B(s; 3s + 5)$.

Ta có: $P(-2;1)$ là trung điểm AB nên
$$\begin{cases} \frac{-2t-3+s}{2} = -2 \\ \frac{t+3s+5}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t+s = -1 \\ t+3s = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ s = -1 \end{cases}$$

Suy ra $A(-3;0), B(-1;2)$.

b) Phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B là: $\frac{x+3}{2} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow x-y+3=0$. Vậy khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ là: $d(M, \Delta) = \frac{|3-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Câu 12. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=-2+2t \end{cases}, d_2: x+y+3=0$. Viết phương trình tham số đường thẳng d qua điểm $M(3;0)$, đồng thời cắt hai đường thẳng d_1, d_2 tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn AB .

Trả lời:

Lời giải:

Xét đường thẳng $d_2: x+y+3=0$; thay $x=t' \Rightarrow y=-3-t'$, ta có phương trình tham số

$$d_2: \begin{cases} x=t' \\ y=-3-t' \end{cases}$$

Gọi $A = d \cap d_1 \Rightarrow A(t; -2+2t)$; gọi $B = d \cap d_2 \Rightarrow B(t'; -3-t')$.

Vì $M(3;0)$ là trung điểm của đoạn AB nên
$$\begin{cases} 3 = \frac{t+t'}{2} \\ 0 = \frac{-2+2t-3-t'}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+t' = 6 \\ 2t-t' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{11}{3} \\ t' = \frac{7}{3} \end{cases}$$
. Ta có

$A\left(\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{16}{3}\right) = -\frac{2}{3}\vec{u}$ với $\vec{u} = (1; 8)$ là một vector chỉ phương của d . Phương trình

tham số của d là
$$\begin{cases} x=3+t \\ y=8t \end{cases}$$

Câu 13. Cho tam giác ABC có $A(2;-1), B(4;5), C(-3;2)$. Viết phương trình tổng quát đường cao AH của tam giác ABC .

Trả lời:

Lời giải:

Cho tam giác ABC có $A(2;-1), B(4;5), C(-3;2)$. Viết phương trình tổng quát đường cao AH của tam giác ABC . AH đi qua $A(2;-1)$ và nhận $\overrightarrow{CB} = (7;3)$ làm vector pháp tuyến, vì vậy phương trình tổng quát của $AH: 7(x-2)+3(y+1)=0$ hay $7x+3y-11=0$.

Câu 14. Cho tam giác ABC với $A(-1;-2)$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $x - y + 4 = 0$.

- a) Viết phương trình đường cao AH của tam giác.
- b) Viết phương trình đường trung bình ứng với cạnh đáy BC của tam giác.

Trả lời:

Lời giải:

a) Đường cao AH vuông góc với BC nên nhận $\vec{u} = (1;-1)$ làm vectơ chỉ phương, suy ra AH có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1)$.

Phương trình tổng quát $AH : 1(x+1) + 1(y+2) = 0$ hay $x + y + 3 = 0$.

b) Chọn điểm $K(0;4)$ thuộc BC , gọi E là trung điểm đoạn AK nên $E\left(-\frac{1}{2};1\right)$. Gọi d là đường trung bình ứng với cạnh đáy BC của tam giác ABC , suy ra d qua E và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-1)$.

Phương trình tổng quát $d : 1\left(x + \frac{1}{2}\right) - 1(y-1) = 0$ hay $2x - 2y + 3 = 0$.

Câu 15. Viết phương trình đường thẳng Δ biết rằng:

- a) Δ chứa các trục tọa độ tại hai điểm $A(-4;0), B(0;-2)$.
- b) Δ qua điểm $E(2;3)$, đồng thời cắt các tia Ox, Oy tại các điểm M, N (khác gốc tọa độ O) biết rằng $OM + ON$ bé nhất.

Trả lời:

Lời giải:

a) Δ có phương trình theo đoạn chắn là $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-2} = 1$ hay $x + 2y + 4 = 0$.

b) Gọi $M(m;0) = \Delta \cap Ox, N(0;n) = \Delta \cap Oy$ với $m, n > 0$. Suy ra $\begin{cases} OM = m \\ ON = n \end{cases}$.

Phương trình Δ được viết theo đoạn chắn $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. Vì $E(2;3) \in \Delta$ nên

$$\frac{2}{m} + \frac{3}{n} = 1 \Rightarrow \frac{2}{m} = \frac{n-3}{n} \Rightarrow m = \frac{2n}{n-3}. \text{ Vì } m, n > 0 \text{ nên } n-3 > 0 \Rightarrow n > 3.$$

$$\text{Ta có: } OM + ON = m + n = \frac{2n}{n-3} + n = 2 + \frac{6}{n-3} + n = 5 + \frac{6}{n-3} + (n-3).$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AM-GM: } \frac{6}{n-3} + (n-3) \geq 2\sqrt{\frac{6}{n-3} \cdot (n-3)} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Suy ra: } OM + ON = 5 + \frac{6}{n-3} + (n-3) \geq 5 + 2\sqrt{6}.$$

Khi tổng $OM + ON$ đạt giá trị nhỏ nhất (bằng $5 + 2\sqrt{6}$) thì dấu bằng của bất đẳng thức trên xảy ra:

$$\frac{6}{n-3} = n-3 \Rightarrow (n-3)^2 = 6 \Rightarrow n = \sqrt{6} + 3 (n > 3). \text{ Suy ra } m = \frac{2(\sqrt{6}+3)}{(\sqrt{6}+3)-3} = \frac{2\sqrt{6}+6}{\sqrt{6}} = 2 + \sqrt{6}.$$

Phương trình tổng quát $\Delta: \frac{x}{2+\sqrt{6}} + \frac{y}{3+\sqrt{6}} = 1$ hay $\frac{x}{2+\sqrt{6}} + \frac{y}{3+\sqrt{6}} - 1 = 0$.

$$\Delta: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})(1)$$

Câu 16. Cho

- 1) Tìm 3 điểm trên Δ .
- 2) Tìm M trên Δ cách $A(3;5)$ một khoảng bằng 5.
- 3) Tìm F trên Δ sao cho AF ngắn nhất.

Trả lời:

Lời giải

- 1) Tìm 3 điểm trên Δ .

$$t = 0: (1) \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$t = 1: (1) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$t = 2: (1) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$$

Lời bình: trên đường thẳng có vô số điểm khác với mỗi giá trị $t \in \mathbb{R}$ ta được một cặp nghiệm $(x; y)$. Trong bài trên lấy 3 giá trị $t = 0, 1, 2$. Các bạn có thể lấy t bằng giá trị khác để tìm được 3 điểm tương ứng.

- 2) Tìm M trên Δ cách $A(3;5)$ một khoảng bằng 5.

$$M \in \Delta: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \Rightarrow M(-2 + t, 1 + 3t)$$

$$MA = 5 \Leftrightarrow MA^2 = 25 \Leftrightarrow (x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (3 + 2 - t)^2 + (5 - 1 - 3t)^2 = 25 \Leftrightarrow (5 - t)^2 + (4 - 3t)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 10t^2 - 46t - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow M(-1; 2) \\ t = \frac{18}{5} \Rightarrow M\left(\frac{8}{5}; \frac{49}{5}\right) \end{cases}$$

- 3) Tìm F trên Δ sao cho AF ngắn nhất.

$$F \in \Delta: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \Rightarrow F(-2 + t; -1 + 3t);$$

$$\overrightarrow{AF} = (-5+t; -6+3t)$$

Vector chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; 3)$

$$\text{Đề } AF \perp \Delta \text{ thì } \overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow 1(-5+t) + 3(-6+3t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{23}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 + \frac{23}{10} = \frac{3}{10} \\ y = -1 + \frac{3 \cdot 23}{10} = \frac{59}{10} \end{cases} \Rightarrow F\left(\frac{3}{10}; \frac{59}{10}\right).$$

Câu 17. Cho $A(1; 6), B(3; 2), \Delta: \begin{cases} x = 3-t \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

1) Tìm tọa độ C trên Δ sao cho ΔABC cân tại C .

2) Tìm tọa độ C trên Δ sao cho ΔABC vuông tại C

Trả lời:

Lời giải

1) Tìm tọa độ C trên Δ sao cho ΔABC cân tại C

$$C \in \Delta: \begin{cases} x = 3-t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow C(3-t; t).$$

$$\Delta ABC \text{ cân tại } C \Leftrightarrow CA = CB$$

$$\Leftrightarrow CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2.$$

$$\Leftrightarrow (1-3+t)^2 + (6-t)^2 = (3-3+t)^2 + (2-t)^2 \Leftrightarrow 12t = 36 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow C(3; 0).$$

2) Tìm tọa độ C trên Δ sao cho ΔABC vuông tại C

$$C \in \Delta: \begin{cases} x = 3-t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow C(3-t; t).$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } C \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{CA} = (-2+t; 6-t); \overrightarrow{CB} = (t; 2-t)$$

$$(1) \Leftrightarrow t(-2+t) + (2-t)(6-t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow C(0; 3) \\ t = 2 \Rightarrow C(1; 2) \end{cases}.$$

Câu 18. Cho $A(1; 6), B(-3; 4), \Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Tìm $N \in \Delta$ sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ

O đến N nhỏ nhất.

Trả lời:

Lời giải

$N \in \Delta$ để ON nhỏ nhất thì $ON \perp \Delta$

$$N \in \Delta \Rightarrow N(1+t; 1+2t), t \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{ON} = (1+t; 1+2t)$$

Vector chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; 2)$

$$\text{Vì } ON \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{ON} \perp \overrightarrow{u_\Delta}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow 1(1+t) + 2(1+2t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-3}{5} \Rightarrow N\left(\frac{2}{5}; \frac{-1}{5}\right)$$

Câu 19. Cho $A(-1; 2), B(3; 1)$ và $d: x - y + 1 = 0$

1) Tìm 1 điểm trên d .

2) Tìm $M \in d$ sao cho ΔMAB cân tại M .

Trả lời:

Lời giải

$$1) d: x - y + 1 = 0 \Rightarrow d: y = x + 1; x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow M(0; 1) \in d$$

$$2) M \in d: y = x + 1 \Rightarrow M(x_M, x_M + 1). \Delta MAB \text{ cân tại } M \Rightarrow MA^2 = MB^2$$

$$\Leftrightarrow x_M = \frac{7}{6} \Rightarrow y_M = x_M + 1 = \frac{13}{6} \Rightarrow M\left(\frac{7}{6}; \frac{13}{6}\right)$$

Câu 20. Cho ΔABC có trọng tâm $G(-2; -1); AB: 4x + y + 15 = 0; AC: 2x + 5y + 3 = 0$.

Tìm tọa độ 3 điểm A, B, C .

Trả lời:

Lời giải

Tọa độ điểm $A = AB \cap AC$ là nghiệm của

$$\text{hệ } \begin{cases} 4x + y + 15 = 0 \\ 2x + 5y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-4; 1)$$

$$B \in AB: y = -4x - 15 \Rightarrow B(x_B; -4x_B - 15)$$

$$C \in AC: y = \frac{-2x - 3}{5} \Rightarrow C\left(x_C; \frac{-2x_C - 3}{5}\right).$$

$$G \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + x_B + x_C = 3(-2) \\ -1 - 4x_B - 15 + \frac{-2x_C - 3}{5} = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -3 \\ x_C = 1 \end{cases} \Rightarrow B(-3; -3), C(1; -1).$$

Câu 21. Cho ΔABC có trung điểm cạnh BC là $M(-1,-1)$; $AB: x+y-2=0$; $AC: 2x+6y+3=0$.
 Tìm 3 điểm A, B, C .

Trả lời:

Lời giải

Tọa độ điểm $A = AB \cap AC$ là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+6y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{15}{4} \\ y=-\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{15}{4}; -\frac{7}{4}\right)$$

$B \in AB: y = -x + 2 \Rightarrow B(x_B; -x_B + 2)$; $C \in AC: y = \frac{-2x-3}{6} \Rightarrow C\left(x_C; \frac{-2x_C-3}{6}\right)$

M là trung điểm của $BC \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_C = -2 \\ -x_B + 2 + \frac{-2x_C-3}{6} = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_C = -26 \\ x_B - 2x_C = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{25}{4} \\ x_C = \frac{-33}{4} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{25}{4}; -\frac{17}{4}\right), C\left(\frac{-33}{4}; \frac{9}{4}\right)$.

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có $A(1;1), B(0;-2), C(4;2)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường cao AH .

b) Viết phương trình tổng quát của trung tuyến CM .

Trả lời:

Lời giải

a) AH qua $A(1;1)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \frac{1}{4}\overline{BC} = (1;1)$

$\Rightarrow AH: 1(x-1) + 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow AH: x + y - 2 = 0$.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB suy ra $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \overline{CM} = \left(-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

Vì CM có vectơ chỉ phương $\vec{u} = -\frac{1}{2}\overline{CM} = (7;5)$ nên vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n} = (5;-7)$.

CM qua $C(4;2)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5;-7)$

$\Rightarrow CM: 5(x-4) - 7(y-2) = 0 \Leftrightarrow CM: 5x - 7y - 6 = 0$.

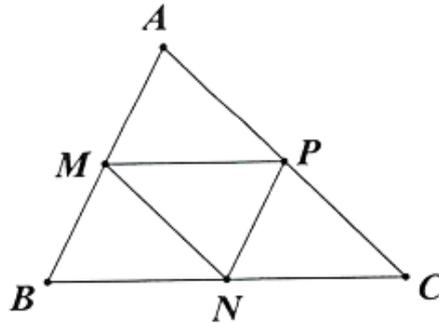
Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết trung điểm các cạnh AB, BC, CA lần lượt là $M(-1;-1), N(1;9), P(9;1)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng chứa cạnh AB .

b) Viết phương trình tổng quát của đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Trả lời:

Lời giải



a) Vì AB có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \frac{1}{8}\overrightarrow{NP} = (1; -1)$ nên vectơ pháp tuyến của AB là $\vec{n} = (1; 1)$.

AB qua $M(-1; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1) \Rightarrow AB: 1(x+1) + 1(y+1) = 0 \Leftrightarrow AB: x + y + 2 = 0$.

b) Vì d là đường trung trực cạnh AB nên d vuông góc với AB

\Rightarrow Vectơ pháp tuyến của d là $\vec{u} = (1; -1)$.

d qua $M(-1; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{u} = (1; -1)$

$\Rightarrow d: 1(x+1) - 1(y+1) = 0 \Leftrightarrow AB: x - y = 0$.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ và điểm $M(3; 1)$.

a) Tìm tọa hình chiếu I của điểm M lên đường thẳng d .

b) Xác định tọa độ điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d .

Trả lời:

Lời giải

a) $d: \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow d: x + y + 1 = 0$

Phương trình đường thẳng MI là $x - y - 2 = 0$.

Tọa độ toạ hình chiếu I của điểm M là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

b) Vì M' đối xứng với M qua đường thẳng d nên I là trung điểm của MM'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_I - x_M = -2 \\ y_{M'} = 2y_I - y_M = -4 \end{cases} \Rightarrow M'(-2; -4)$$

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng (d) có phương trình: $x - 2y + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng qua $M(2;1)$ và tạo với (d) một góc 45° .

Trả lời:

Lời giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm; $\vec{n} = (A, B)$ là VTPT của Δ ($A^2 + B^2 \neq 0$)

Để Δ tạo với (d) một góc 45° thì

$$\cos 45^\circ = \frac{|A - 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(A - 2B)^2 = 5(A^2 + B^2) \Leftrightarrow \begin{cases} A = -3B \\ B = 3A \end{cases}$$

+ Với $A = -3B$, chọn $B = -1 \Rightarrow A = 3$:

Khi đó Δ qua $M(2;1)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -1)$

$$\Rightarrow \Delta: 3(x - 2) - 1(y - 1) = 0 \Leftrightarrow \Delta: 3x - y - 5 = 0.$$

+ Với $B = 3A$, chọn $A = 1 \Rightarrow B = 3$:

Khi đó Δ qua $M(2;1)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 3)$

$$\Rightarrow \Delta: 1(x - 2) + 3(y - 1) = 0 \Leftrightarrow \Delta: x + 3y - 5 = 0.$$

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba đường thẳng $(\Delta_1): 3x + 4y - 6 = 0$, $(\Delta_2): 4x + 3y - 1 = 0$ và $(\Delta_3): y = 0$.

Gọi $A = (\Delta_1) \cap (\Delta_2)$, $B = (\Delta_2) \cap (\Delta_3)$, $C = (\Delta_3) \cap (\Delta_1)$.

a) Viết phương trình đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A .

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Trả lời:

Lời giải

a) Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 4y - 6 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$.

Do đó $A = (-2; 3)$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 0 \end{cases}$.

Do đó $B = \left(\frac{1}{4}; 0\right)$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x+4y-6=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$.

Do đó $C = (2;0)$.

Phương trình các đường phân giác của góc A là $\frac{3x+4y-6}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm \frac{4x+3y-1}{\sqrt{3^2+4^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+5=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$

Đặt $f_1(x; y) = x - y + 5$.

Ta có $\begin{cases} f_1\left(\frac{1}{4}; 0\right) = -\frac{19}{5} < 0 \\ f_1(2; 0) = -3 < 0 \end{cases}$.

Do đó hai điểm B và C nằm cùng phía của đường thẳng $x - y - 5 = 0$.

Vậy $x + y - 1 = 0$ và $x - y - 5 = 0$ lần lượt là đường phân giác trong và ngoài của góc A .

b) Phương trình các đường phân giác góc B là $\frac{4x+3y-1}{\sqrt{4^2+3^2}} = \pm \frac{y}{\sqrt{0^2+1^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y-1=0 \\ 4x+8y-1=0 \end{cases}$.

Đặt $f_2(x; y) = 4x - 2y - 1$.

Ta có $f_2(-2; 3) = -15 < 0$ và $f_2(2; 0) = 8 > 0$.

Do đó hai điểm A và C khác phía đối với đường thẳng $4x - 2y - 1 = 0$.

Do đó $4x - 2y - 1 = 0$ là đường phân giác trong của góc B .

Tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 4x-2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$