CÂU HỎI

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn tâm $I(5;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x-4y-6=0$.

Trả lời: ....

Câu 2. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua $A(1;1)$ và tiếp xúc với 2 trục tọa độ.

Trả lời: ....

Câu 3. Viết phương trình đường tròn (C) trong trường hợp sau: (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$.

Trả lời: ....

Câu 4. Tìm m để phương trình $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là một phương trình đường tròn.

Trả lời: ....

Câu 5. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-4=0$.
Tìm m để qua điểm $A(2;m)$ chỉ có một tiếp tuyến với (C).

Trả lời: ....

Câu 6. Cho đường tròn $(C): (x-6)^2+(y-7)^2=25$. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) và song song với đường thẳng $\Delta: x+2y-5=0$.

Trả lời: ....

Câu 7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của đường tròn (C) đến điểm B bằng 5.

Trả lời: ....

Câu 8. Cho đường tròn $(C): (x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và các đường thẳng $d_1: x-y=0$, $d_2: x-7y=0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm I nằm trên đường tròn (C) và tiếp xúc với d_1, d_2.

Trả lời: ....

Câu 9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vị trí của một chất điểm K tại thời điểm $t(0 \le t \le 180)$ có toạ độ là $\left(3+2\cos t^\circ; 4+2\sin t^\circ\right)$. Tìm quỹ đạo chuyển động của chất điểm K.

Trả lời: ....

Câu 10. Lập phương trình đường tròn (C) biết:
(C) có tâm $B(1;1)$ và cắt $d: 3x+4y+8=0$ tại M, N thoả mãn $MN=8$;

Trả lời: ....

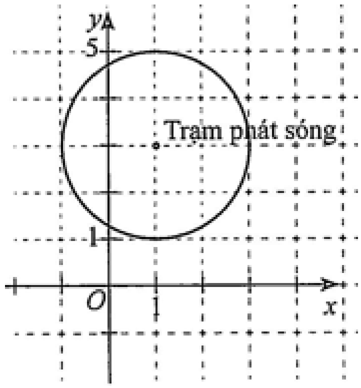
Câu 11. Lập phương trình đường tròn (C) biết:
(C) đi qua ba điểm $M(2;0), N(-2;0), P(1;-1)$.

Trả lời: ....

Câu 12. Một vật chuyển động tròn đều chịu tác động của lực hướng tâm, quỹ đạo chuyển động của vật trong mặt phẳng toạ độ Oxy là đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 100$. Vật chuyển động đến điểm $M(8;6)$ thì bị bay ra ngoài. Trong những giây đầu tiên sau khi vật bay ra ngoài, vật chuyển động trên đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn. Viết phương trình tiếp tuyến đó.

Trả lời: ....

Câu 13. Hình mô phỏng một trạm thu phát sóng wifi chuyên dụng tầm xa đặt ở vị trí I có tọa độ $(1;3)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên các trục là ki-lô-mét).



Nếu người dùng điện thoại ở toạ độ $(2;2)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không?

Trả lời: ....

Câu 14. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên các trục là mét), một chất điểm chuyển động đều luôn cách điểm $I(3;3)$ một khoảng bằng 2. Một chất điểm khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng, tại hai thời điểm, chất điểm đó ở vị trí $A(-3;2)$ và $B(2;7)$. Tại mọi thời điểm, khoảng cách giữa hai chất điểm lớn hơn bao nhiêu mét.

Trả lời: ....

Câu 15. Cho phương trình: $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$ (1). Tìm m để (1) là phương trình của một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{10}$.

Trả lời: ....

Câu 16. Cho $A(-1;0), B(2;4)$ và $C(4;1)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thoả mãn $3MA^2 + MB^2 = 2MC^2$ là một đường tròn (C). Tìm tính bán kính của (C).

Trả lời: ....

Câu 17. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ và hai điểm $A(2;-2), B(-3;-1)$. Gọi M, N là các điểm thuộc (C) sao cho AM, AN lần lượt đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Tính $AM + AN$.

Trả lời: ....

Câu 18. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ và hai điểm $A(2;-2), B(-3;-1)$. Tìm P thuộc (C) sao cho BP lớn nhất. Tìm Q thuộc (C) sao cho BQ bé nhất.

Trả lời: ....

Câu 19. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2=25$. Tìm tham số m để đường thẳng $\Delta: x+2y-3m+1=0$ tiếp xúc đường tròn.

Trả lời: ....

Câu 20. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2=25$. Tìm tham số m để đường thẳng $\Delta': 3x-4y+2m-5=0$ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B sao cho đoạn AB bằng 8.

Trả lời: ....

Câu 21. Cho họ đường tròn $(C_m): x^2+y^2+4mx+2(m+1)y-1=0$.

Tìm bán kính bé nhất của đường tròn (C_m).

Trả lời: ....

Câu 22. Cho họ đường tròn $(C_m): x^2+y^2+4mx+2(m+1)y-1=0$.

Tìm m để (C_m) đi qua điểm $A(1;0)$.

Trả lời: ....

Câu 23. Cho họ đường tròn $(C_m): x^2+y^2+4mx+2(m+1)y-1=0$.

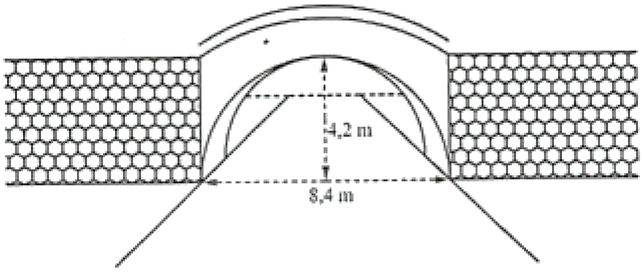
Biết rằng khi m thay đổi thì (C_m) luôn qua hai điểm cố định. Tìm tọa độ hai điểm đó.

Trả lời: ....

Câu 24. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+4y-1=0$ biết Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x+3y+4=0$.

Trả lời: ....

Câu 25. Một cái cổng hình bán nguyệt rộng $8,4\,m$, cao $4,2\,m$ như hình vẽ. Mặt đường dưới cổng được chia làm hai làn cho xe ra vào. Một chiếc xe tải rộng $2,2\,m$, cao $2,6\,m$ đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng mà không làm hư hỏng cổng hay không?



Trả lời: ....

Câu 26. Tìm m để phương trình $x^2+y^2-2(m+1)x-2(m+2)y+6m+7=0$ là phương trình một đường tròn.

Trả lời: ....

Câu 27. Cho hai điểm $A(-4;2)$ và $B(2;-3)$. Tập hợp điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $MA^2+MB^2=31$ là một đường tròn. Tìm bán kính đường tròn đó.

Trả lời: ....

Câu 28. Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB
.
Trả lời: ....

Câu 29. Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.
Trả lời: ....

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y=0$. Đường tròn (C) có bán kính $R=\sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho $AB=4\sqrt{2}$. Các tiếp tuyến của (C) tại hai điểm A, B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Hãy viết phương trình của đường tròn (C).

Trả lời: ....

Câu 31. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ có tâm I và đường thẳng
$\Delta: \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$.
Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B để diện tích tam giác IAB là lớn nhất

Trả lời: ....

Câu 32. Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau: $(C_1): x^2+y^2-4y-5=0$ và $(C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0$.

Trả lời: ....

Câu 33. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+6x-4y+4=0$ và điểm $M(-2;3)$.
Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt đường tròn tại 2 điểm A, B sao cho $AB=\frac{12}{\sqrt{5}}$.

Trả lời: ....

Câu 34. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(2;4)$.
Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt đường tròn tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm đoạn AB.

Trả lời: ....

Câu 35. Xét sự tương giao giữa đường tròn $(C): x^2+y^2-7x-y=0$ và đường thẳng $\Delta: x-y-3=0$. Tìm tọa độ giao điểm nếu có.

Trả lời: ....

Câu 36. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-4y+4=0$, điểm $M(4;6)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua $M(4;6)$.

Trả lời: ....

Câu 37. Cho đtròn $(C): x^2+y^2-4x-4y+4=0$, điểm $M(4;6)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho $AB=2$.

Trả lời: ....

Câu 38. Cho phương trình $x^2+y^2-2mx+4my+6m-1=0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình đường tròn?

Trả lời: ....

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với Ox, Oy.

Trả lời: ....

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ, với $A(0;4), B(2;6), \Delta: x-2y+5=0$.

Trả lời: ....

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+5)^2=4$ tại điểm $M(3;-5)$.

Trả lời: ....

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-6y+5=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $\Delta: x+2y-15=0$.

Trả lời: ....

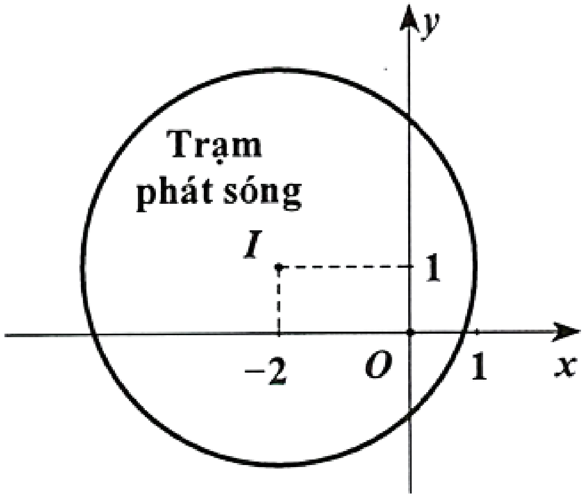
Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm $A(1;3)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.

Trả lời: ....

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 4x+3y+m=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-9=0$. Tìm m để Δ và (C) tiếp xúc với nhau.

Trả lời: ....

Câu 45. Hình vẽ bên dưới mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có tọa độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng toạ độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét). Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng $3km$.



Trả lời: …………………………

LỜI GIẢI

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn tâm $I(5;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x-4y-6=0$.

Trả lời: $(x-5)^2+(y-6)^2=9$

Lời giải

Ta có: $R=d(I;d)=\dfrac{|3.5-4.6-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$.

Phương trình đường tròn cần tìm là $(x-5)^2+(y-6)^2=9$.

Câu 2. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua $A(1;1)$ và tiếp xúc với 2 trục tọa độ.

Trả lời: $(C_1):(x-2+\sqrt{2})^2+(y-2+\sqrt{2})^2=(2-\sqrt{2})^2$

$(C_2):(x-2-\sqrt{2})^2+(y-2-\sqrt{2})^2=(2+\sqrt{2})^2$

Lời giải

Phương trình đường tròn (C) tâm $I(a;b)$ bán kính R có dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Do (C) tiếp xúc $Ox,Oy \Leftrightarrow R=|a|=|b|$.

+ Trường hợp 1: Nếu $a=b$

$(C):(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$. Do (C) qua $A(1;1)$ suy ra

$(1-a)^2+(1-a)^2=a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2-\sqrt{2} \\ a=2+\sqrt{2} \end{array}\right.$. Vậy có 2 đường tròn:

$(C_1):(x-2+\sqrt{2})^2+(y-2+\sqrt{2})^2=(2-\sqrt{2})^2$

$\left(C_2\right):(x-2-\sqrt{2})^2+(y-2-\sqrt{2})^2=(2+\sqrt{2})^2$

+ Trường hợp 2: Nếu $a=-b$

(C) : $(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$. Do (C) qua $A(1;1)$ suy ra

$(1-a)^2+(1+a)^2=a^2$ (vô nghiệm)

Câu 3. Viết phương trình đường tròn (C) trong trường hợp sau: (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$.

Trả lời: $(x-10)^2+y^2=49;\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$.

Lời giải:

Gọi tâm đường tròn là $I(6a+10;a)\in d$.

Đường tròn tiếp xúc với d_1,d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R, ta có:

$$d\left(I,d_1\right)=d\left(I,d_2\right)\Leftrightarrow\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5}=\frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5}$$

$$\Leftrightarrow|22a+35|=|21a+35|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}22a+35=21a+35\\22a+35=-21a-35\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=-\frac{70}{43}\end{array}\right.$$

- Với $a=0$ thì $K(10;0)$ và $R=7$ suy ra $(C):(x-10)^2+y^2=49$.

- Với $a=-\frac{70}{43}$ thì $K\left(\frac{10}{43};-\frac{70}{43}\right)$ và $R=\frac{7}{43}$ suy ra

$(C):\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$.

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là:

$(x-10)^2+y^2=49;\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$.

Câu 4. Tìm m để phương trình $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là một phương trình đường tròn.

Trả lời: $m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$

Lời giải

Phương trình đã cho là phương trình đường tròn khi và chỉ khi
$(m+2)^2+(-2m)^2-(19m-6)>0\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0\Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Câu 5. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y-4=0$.
Tìm m để qua điểm $A(2;m)$ chỉ có một tiếp tuyến với (C).

Trả lời: $m=2$

Lời giải

Qua điểm A chỉ có một tiếp tuyến với đường tròn (C) khi $A\in(C)$

hay $2^2+m^2+2\cdot2-4m-4=0\Leftrightarrow m^2-4m+4=0\Leftrightarrow(m-2)^2=0\Leftrightarrow m=2$.

Câu 6. Cho đường tròn $(C):(x-6)^2+(y-7)^2=25$. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) và song song với đường thẳng $\Delta: x+2y-5=0$.

Trả lời: $d:x+2y+5\sqrt{5}-20=0$ hoặc $d:x+2y-5\sqrt{5}-20=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(6;7)$, bán kính $R=5$.

Đường thẳng d song song với Δ nên có dạng: $x+2y+m=0(m\neq-5)$.

Mặt khác, đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) nên

$$d(I,\Delta)=\frac{|6+2\cdot7+m|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|20+m|}{\sqrt{5}}=5\Leftrightarrow m=5\sqrt{5}-20 \text{ hoặc } m=-5\sqrt{5}-20.$$

Vậy $d:x+2y+5\sqrt{5}-20=0$ hoặc $d:x+2y-5\sqrt{5}-20=0$.

Câu 7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của đường tròn (C) đến điểm B bằng 5 .

Trả lời: $(x-2)^2+(y-7)^2=49$ hoặc $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

Lời giải

Đường tròn (C) tiếp xúc với trục Ox tại A nên ta có $I(2;b)$ và $d(I,Ox)=|b|=R$.

Mặt khác, $IB=5\Leftrightarrow IB^2=25\Leftrightarrow(6-2)^2+(4-b)^2=25\Leftrightarrow b=7$ hoặc $b=1$.

- $b=7\Rightarrow I(2;7),R=7$. Phương trình đường tròn (C) là: $(x-2)^2+(y-7)^2=49$.

- $b=1\Rightarrow I(2;1),R=1$. Phương trình đường tròn (C) là: $(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 8. Cho đường tròn $(C):(x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và các đường thẳng $d_1:x-y=0$, $d_2:x-7y=0$. Viết phương trình đường tròn $\left(C'\right)$ có tâm I nằm trên đường tròn (C) và tiếp xúc với d_1,d_2.

Trả lời: $\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\left(x-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{8}{25}$

Lời giải

Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn $\left(C'\right)$. Ta có: $I\in(C)\Leftrightarrow(a-2)^2+b^2=\frac{4}{5}$.

Đường tròn $\left(C'\right)$ tiếp xúc với hai đường thẳng d_1 và d_2

$\Leftrightarrow d\left(I,d_1\right)=d\left(I,d_2\right)=R\Leftrightarrow \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|a-7b|}{\sqrt{50}}\Leftrightarrow 5|a-b|=|a-7b|$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{-1}{2}b$ hoặc $a=2b$.

- $a=\dfrac{-1}{2}b\Rightarrow\left(\dfrac{-1}{2}b-2\right)^2+b^2=\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow\dfrac{5}{4}b^2+2b+\dfrac{16}{5}=0$ (vô nghiệm).

- $a=2b\Rightarrow(2b-2)^2+b^2=\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow 5b^2-8b+\dfrac{16}{5}=0\Leftrightarrow b=\dfrac{4}{5}$.

Suy ra $a=\dfrac{8}{5},R=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

Vậy đường tròn (C') có phương trình là: $\left(x-\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(x-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{8}{25}$.

Câu 9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vị trí của một chất điểm K tại thời điểm $t(0\le t\le 180)$ có toạ độ là $\left(3+2\cos t^\circ;4+2\sin t^\circ\right)$. Tìm quỹ đạo chuyển động của chất điểm K.

Trả lời: $(x-3)^2+(y-4)^2=4$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}x=3+2\cos t^\circ\\ y=4+2\sin t^\circ\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=2\cos t^\circ\\ y-4=2\sin t^\circ\end{cases}\Rightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=4$.

Vậy chất điểm K chuyển động theo quỹ đạo đường tròn $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R=2$.

Câu 10. Lập phương trình đường tròn (C) biết:
(C) có tâm $B(1;1)$ và cắt $d:3x+4y+8=0$ tại M,N thoả mãn $MN=8$;

Trả lời: $(x-1)^2+(y-1)^2=25$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của B lên $d:3x+4y+8=0$. Khi đó khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là $BH=\dfrac{|3\cdot1+4\cdot1+8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$.

H là trung điểm của MN nên $HM=4$. Suy ra bán kính đường tròn (C) là:
$R=\sqrt{BH^2+HM^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5.$

Vậy phương trình đường tròn (C) là: $(x-1)^2+(y-1)^2=25$.

Câu 11. Lập phương trình đường tròn (C) biết: (C) đi qua ba điểm $M(2;0),N(-2;0),P(1;-1)$.

Trả lời: $x^2+(y-1)^2=5$

Lời giải

Giả sử tâm của đường tròn là điểm $I(a;b)$.

Vì $IM = IN = IP$ nên $IM^2 = IN^2 = IP^2$. Suy ra

$$\begin{cases}(2-a)^2+(0-b)^2=(-2-a)^2+(0-b)^2\\(-2-a)^2+(0-b)^2=(1-a)^2+(-1-b)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2-4a+4=a^2+b^2+4a+4\\a^2+b^2+4a+4=a^2+b^2-2a+2b+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8a=0\\6a-2b+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\b=1.\end{cases}$$

Bán kính đường tròn là: $R = IA = \sqrt{(2-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn là: $x^2+(y-1)^2=5$.

Câu 12. Một vật chuyển động tròn đều chịu tác động của lực hướng tâm, quỹ đạo chuyển động của vật trong mặt phẳng toạ độ Oxy là đường tròn có phương trình $x^2+y^2=100$. Vật chuyển động đến điểm $M(8;6)$ thì bị bay ra ngoài. Trong những giây đầu tiên sau khi vật bay ra ngoài, vật chuyển động trên đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn. Viết phương trình tiếp tuyến đó.

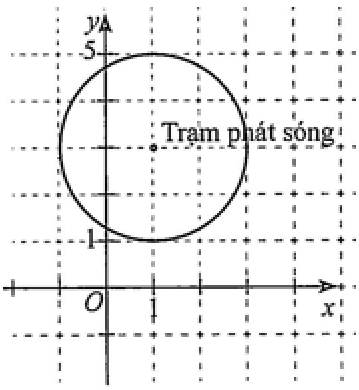
Trả lời: $4x+3y-50=0$

Lời giải

Vectơ pháp tuyến của tiếp tuyến là: $\overrightarrow{OM}=(8;6)$.

Phương trình của tiếp tuyến là: $8(x-8)+6(y-6)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-50=0$.

Câu 13. Hình mô phỏng một trạm thu phát sóng wifi chuyên dụng tầm xa đặt ở vị trí I có tọa độ $(1;3)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên các trục là ki-lô-mét).



Nếu người dùng điện thoại ở toạ độ $(2;2)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không?

Trả lời: có thể

Lời giải

Phương trình của đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng là: $(x-1)^2+(y-3)^2=4$

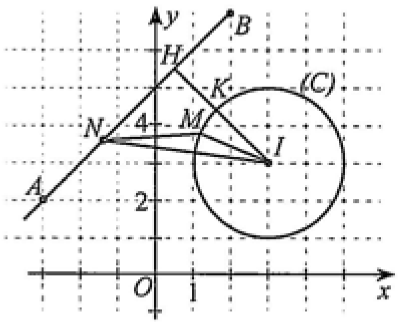
Khoảng cách từ tâm $I(1;3)$ đến điểm có toạ độ $(2;2)$ là: $\sqrt{(2-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{2}$

Vì $\sqrt{2} < 2$ nên điểm có toạ độ $(2;2)$ nằm trong đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng. Vậy người dùng có thể sử dụng dịch vụ của trạm.

Câu 14. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy (đơn vị trên các trục là mét), một chất điểm chuyển động đều luôn cách điểm $I(3;3)$ một khoảng bằng 2. Một chất điểm khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng, tại hai thời điểm, chất điểm đó ở vị trí $A(-3;2)$ và $B(2;7)$. Tại mọi thời điểm, khoảng cách giữa hai chất điểm lớn hơn bao nhiêu mét.

Trả lời: $1m$

Lời giải



Quỹ đạo chuyển động của chất điểm thứ nhất là đường tròn (C) có phương trình chính tắc: $(x-3)^2+(y-3)^2=4.$

Vì $\overrightarrow{AB}=(5;5)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB nên phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x+3}{5}=\frac{y-2}{5} \Leftrightarrow x-y+5=0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng AB.

Ta có: $IH=\frac{|3-3+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}(m)$.

Vì $\frac{5}{\sqrt{2}}>2$, tức là $IH>R$ nên đường thẳng AB và đường tròn (C) không có điểm chung. Gọi K là giao điểm của đoạn thẳng IH và đường tròn. Ta có: $HK=IH-IK=\frac{5}{\sqrt{2}}-1>1(m).$

Xét M là điểm bất kì trên đường tròn, N là điểm bất kì trên đường thẳng AB.

Ta có: $MN \ge IN-IM, IM=IK, IN \ge IH \Rightarrow MN \ge IH-IK=HK>1m$.

Vậy tại mọi thời điểm, khoảng cách giữa hai chất điểm lớn hơn $1m$.

Câu 15. Cho phương trình: $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0$ (1). Tìm m để (1) là phương trình của một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{10}$.

Trả lời: $m=0; m=3$

Lời giải

Đặt $a=\frac{-2m}{-2}=m, b=\frac{-4(m-2)}{-2}=2(m-2), c=6-m$.

Điều kiện để (1) là phương trình đường tròn : $a^2+b^2-c>0$

$\Leftrightarrow m^2+4(m-2)^2-6+m>0 \Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right.$.

Với điều kiện trên, bán kính đường tròn là $R=\sqrt{5m^2-15m+10}$.

Theo giả thiết: $R=\sqrt{10} \Leftrightarrow 5m^2-15m+10=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$ (nhận).

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn là $m=0; m=3$.

Câu 16. Cho $A(-1;0), B(2;4)$ và $C(4;1)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thoả mãn $3MA^2+MB^2=2MC^2$ là một đường tròn (C). Tìm tính bán kính của (C).

Trả lời: $R=\dfrac{\sqrt{107}}{2}$

Lời giải:

Gọi $M(x;y)$. Ta có: $3MA^2+MB^2=2MC^2$

$\Leftrightarrow 3\left[(x+1)^2+y^2\right]+(x-2)^2+(y-4)^2=2\left[(x-4)^2+(y-1)^2\right]$

$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+6x+3+x^2+y^2-4x-8y+20=2x^2+2y^2-16x-4y+34$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+18x-4y-11=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+9x-2y-\dfrac{11}{2}=0\,(*)$

Đặt $a=-\dfrac{9}{2}, b=1, c=-\dfrac{11}{2}$. Ta có $a=-\dfrac{9}{2}, b=1, c=-\dfrac{11}{2} a^2+b^2-c=\dfrac{107}{4}>0$ nên $(*)$ là phương trình của một đường tròn (tức đường tròn (C)).

Bán kính của (C) là: $R=\dfrac{\sqrt{107}}{2}$.

Câu 17. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+2y-7=0$ và hai điểm $A(2;-2), B(-3;-1)$. Gọi M, N là các điểm thuộc (C) sao cho AM, AN lần lượt đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Tính $AM+AN$.

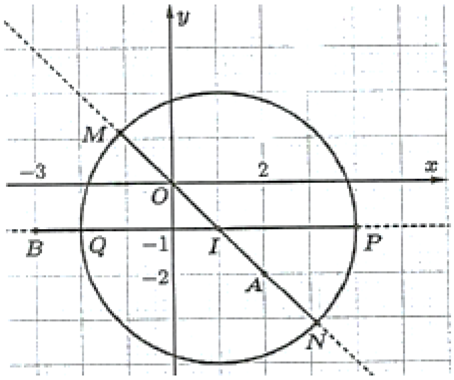
Trả lời: 6

Lời giải

(C) có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{1+1+7}=3$.

Ta có : $IA=\sqrt{(2-1)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{2}<R$ nên A nằm bên trong đường tròn.

$IB=\sqrt{(-3-1)^2+(-1+1)^2}=4>R$ nên B nằm bên ngoài đường tròn.



Vì M thuộc (C) và AM lớn nhất nên A, I, M thẳng hàng (I nằm giữa A, M) ta có: $AM = R + IA$.

N thuộc (C), AN bé nhất nên I, A, N thẳng hàng (A nằm giữa I, N), ta có $AN = R - IA$.

Suy ra: $AM + AN = (R + IA) + (R - IA) = 2R = 6$.

Câu 18. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ và hai điểm $A(2;-2), B(-3;-1)$. Tìm P thuộc (C) sao cho BP lớn nhất. Tìm Q thuộc (C) sao cho BQ bé nhất.

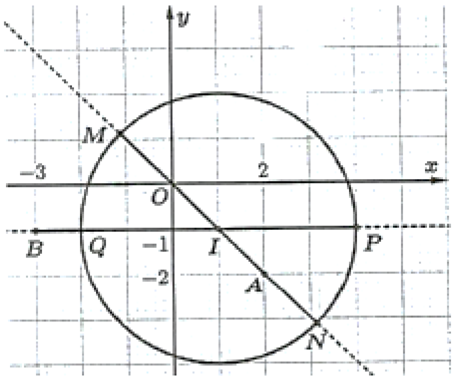
Trả lời: $P(4;-1)$ và $Q(2;-1)$

Lời giải

(C) có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R = \sqrt{1+1+7} = 3$.

Ta có : $IA = \sqrt{(2-1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{2} < R$ nên A nằm bên trong đường tròn.

$IB = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1+1)^2} = 4 > R$ nên B nằm bên ngoài đường tròn.



P thuộc (C) và BP lớn nhất nên B, I, P thẳng hàng (I nằm giữa B, P). Do đó P là một giao điểm của đường thẳng IB với đường tròn (C).

Ta có : $\overrightarrow{IB} = (-4;0)$ nên IB có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0;1)$; phương trình IB là $y + 1 = 0$.

Ta có hệ $\begin{cases} y+1=0 \\ x^2+y^2-2x+2y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$.

Ta có I nằm giữa B, P nên $x_B < x_I < x_P$ hay $-3 < 1 < x_P$ nên $P(4;-1)$ thỏa mãn.

Điểm còn lại chính là Q với tọa độ $Q(2;-1)$.

Câu 19. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2=25$. Tìm tham số m để đường thẳng $\Delta: x+2y-3m+1=0$ tiếp xúc đường tròn.

Trả lời: $m=\dfrac{1\pm 5\sqrt{5}}{3}$

Lời giải

(C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=5$.

Δ tiếp xúc $(C) \Leftrightarrow d(O,\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|0+2.0-3m+1|}{\sqrt{1+4}}=5 \Leftrightarrow |-3m+1|=5\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3m+1=5\sqrt{5} \\ -3m+1=-5\sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow m=\dfrac{1\pm 5\sqrt{5}}{3}$. Vậy $m=\dfrac{1\pm 5\sqrt{5}}{3}$ thỏa mãn đề bài.

Câu 20. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2=25$. Tìm tham số m để đường thẳng $\Delta': 3x-4y+2m-5=0$ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B sao cho đoạn AB bằng 8.

Trả lời: $m=-5; m=10$

Lời giải

Gọi H là trung điểm đoạn AB, ta có $HA=HB=4$.

Xét tam giác OHA vuông tại H có :

$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3;$

Suy ra $d(O,\Delta')=3$; mà $d(O,\Delta')=\dfrac{|2m-5|}{5}$. Do vậy: $\dfrac{|2m-5|}{5}=3 \Leftrightarrow |2m-5|=15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-5 \\ m=10 \end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn: $m=-5; m=10$.

Câu 21. Cho họ đường tròn $(C_m): x^2+y^2+4mx+2(m+1)y-1=0$.

Tìm bán kính bé nhất của đường tròn (C_m).

Trả lời: $R_{\min}=\sqrt{\dfrac{9}{5}}$

Lời giải:

Đặt $a=\dfrac{4m}{-2}=-2m, b=\dfrac{2(m+1)}{-2}=-(m+1), c=-1$.

Ta có : $a^2+b^2-c=4m^2+(m+1)^2+1>0, \forall m\in\mathbb{R}$ nên (C_m) luôn là đường tròn với mọi số thực m.

Bán kính đường tròn là:

$R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{5m^2+2m+2}=\sqrt{5\left(m+\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{9}{5}}\ge\sqrt{\dfrac{9}{5}}.$

Vậy bán kính nhỏ nhất của đườn tròn $R_{\min}=\sqrt{\frac{9}{5}}$; khi đó $m=-\frac{1}{5}$.

Câu 22. Cho họ đường tròn $\left(C_m\right): x^2+y^2+4mx+2(m+1)y-1=0$.

Tìm m để $\left(C_m\right)$ đi qua điểm $A(1;0)$.

Trả lời: $m=0$

Lời giải:

$\left(C_m\right)$ đi qua điểm $A(1;0)$ nên $1^2+0^2+4m\cdot1+2(m+1)\cdot0-1=0\Rightarrow m=0$.

Vậy $m=0$ thỏa mãn đề bài.

Câu 23. Cho họ đường tròn $\left(C_m\right): x^2+y^2+4mx+2(m+1)y-1=0$.

Biết rằng khi m thay đổi thì $\left(C_m\right)$ luôn qua hai điểm cố định. Tìm tọa độ hai điểm đó.

Trả lời: $(1;-2),\left(-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$

Lời giải:

Giả sử $\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định mà $\left(C_m\right)$ luôn đi qua với mọi m.

Ta có : $x_0^2+y_0^2+4mx_0+2(m+1)y_0-1=0,\forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 4mx_0+2my_0+x_0^2+y_0^2+2y_0-1=0,\forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(4x_0+2y_0\right)m+x_0^2+y_0^2+2y_0-1=0,\forall m\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x_0+2y_0=0\\x_0^2+y_0^2+2y_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=-2x_0\\x_0^2+\left(-2x_0\right)^2+2\left(-2x_0\right)-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=-2x_0\\5x_0^2-4x_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=1\\y_0=-2\end{cases}\vee\begin{cases}x_0=-\frac{1}{5}\\y_0=\frac{2}{5}\end{cases}.$$

Vậy với mọi số thực m thì $\left(C_m\right)$ luôn đi qua hai điểm $(1;-2),\left(-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$.

Câu 24. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+4y-1=0$ biết Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x+3y+4=0$.

Trả lời: $\Delta: 3x-2y-10\pm3\sqrt{13}=0$

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-2)$, bán kính $R=3$.

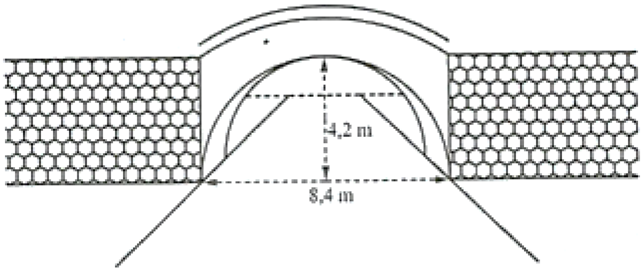
Vì $\Delta\perp\Delta'$ nên phương trình Δ có dạng: $3x-2y+c=0$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc đường tròn (C) khi và chỉ khi $d(I,\Delta)=3$

$\Leftrightarrow \frac{|3.2-2(-2)+c|}{\sqrt{9+4}}=3 \Leftrightarrow |c+10|=3\sqrt{13} \Leftrightarrow c=-10\pm 3\sqrt{13}.$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn là $\Delta: 3x-2y-10\pm 3\sqrt{13}=0$.

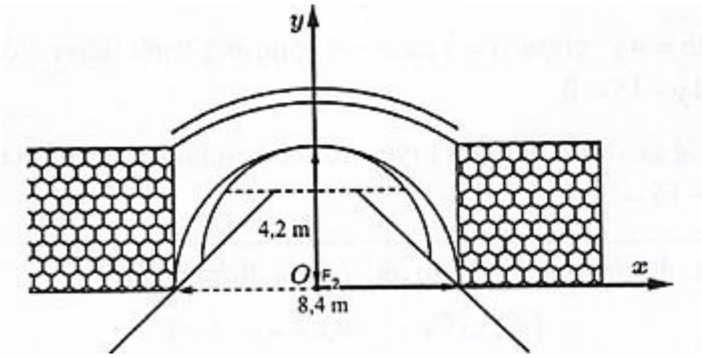
Câu 25. Một cái cổng hình bán nguyệt rộng $8,4m$, cao $4,2m$ như hình vẽ. Mặt đường dưới cổng được chia làm hai làn cho xe ra vào. Một chiếc xe tải rộng $2,2m$, cao $2,6m$ đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng mà không làm hư hỏng cổng hay không?



Trả lời: không gây hư hỏng

Lời giải

Đặt hệ trục Oxy như hình vẽ với gốc O là tâm của bán nguyệt.



Khi đó cái cổng được cho bởi nửa đường tròn tâm O, bán kính $R=4,2m$; phương trình nửa đường tròn là: $\begin{cases} x^2+y^2=4,2^2 \\ y\geq 0 \end{cases}$.

Xe tải phải đi ở làn đường bên phải (ứng với một phần tư đường tròn bên phải). Xe tải muốn đi qua không vướng gì thì đường chéo mặt cắt ngang của xe tải (giả sử là hình chữ nhật) nhỏ hơn bán kính cổng bán nguyệt.

Đường chéo cần tìm là: $\sqrt{2,2^2+2,6^2}\approx 3,4m < R$.

Vậy chiếc xe tải như trên có thể qua cổng mà không gây hư hỏng gì.

Câu 26. Tìm m để phương trình $x^2+y^2-2(m+1)x-2(m+2)y+6m+7=0$

là phương trình một đường tròn.

Trả lời: $m<-1 \vee m>1$

Lời giải

Đặt $a=m+1, b=m+2, c=6m+7$.

Phương trình đã cho là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$

$\Leftrightarrow (m+1)^2+(m+2)^2-6m-7>0 \Leftrightarrow 2m^2-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>1 \end{array}\right.$.

Vậy $m<-1 \vee m>1$ thỏa mãn đề bài.

Câu 27. Cho hai điểm $A(-4;2)$ và $B(2;-3)$. Tập hợp điểm $M(x;y)$ thỏa mãn $MA^2+MB^2=31$ là một đường tròn. Tìm bán kính đường tròn đó.

Trả lời: $R=\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $MA^2+MB^2=31 \Leftrightarrow (x+4)^2+(y-2)^2+(x-2)^2+(y+3)^2=31$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+4x+2y+2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x+y+1=0 \quad (*)$.

$(*)$ là phương trình của một đường tròn có tâm $I\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{1}{2}$.

Câu 28. Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

Trả lời: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$

Lời giải

Gọi (C_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB. Ta có tam giác OAB vuông tại O nên tâm I của đường tròn (C_1) là trung điểm cạnh AB suy ra $I(4;3)$; bán kính đường tròn là

$R=IA=\sqrt{(8-4)^2+(0-3)^2}=5$. Vậy phương trình đường tròn (C_1) là $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.

Câu 29. Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Trả lời: $(C_2):(x-2)^2+(y-2)^2=4$

Lời giải

Gọi (C_2) là đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Ta có $OA=8; OB=6; AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$

Diện tích tam giác $OAB: S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=pr \Rightarrow r=\frac{OA\cdot OB}{OA+OB+AB}=2$.

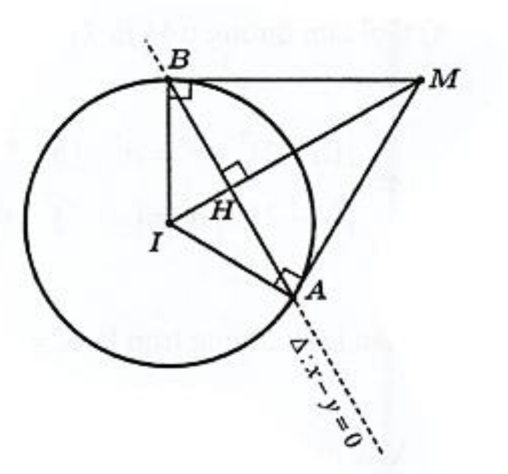
Dễ thấy đường tròn (C_2) có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của nó có tọa độ là $J(2;2)$.

Vậy phương trình $\left(C_2\right):(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y=0$. Đường tròn (C) có bán kính $R=\sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho $AB=4\sqrt{2}$. Các tiếp tuyến của (C) tại hai điểm A, B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Hãy viết phương trình của đường tròn (C).

Trả lời: $(x-5)^2+(y-3)^2=10$

Lời giải



Gọi I là tâm của đường tròn (C); gọi M là giao điểm của các tiếp tuyến tại A, B của $(C), H=IM \cap AB$. Suy ra H là trung điểm của $AB, AH=\dfrac{AB}{2}=2\sqrt{2}$. Vì M thuộc tia Oy nên $M(0;t), t \geq 0$.

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{(2\sqrt{2})^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{(\sqrt{10})^2} \Rightarrow AM=2\sqrt{10}$.

Vậy $MH=\sqrt{MA^2-AH^2}=4\sqrt{2}$.

Ta có: $MH=d(M,\Delta)=\dfrac{|0-t|}{\sqrt{1+1}}=4\sqrt{2} \Rightarrow t=8 \Rightarrow M(0;8)$.

Phương trình đường thẳng IM qua M, vuông góc với Δ là $IM: x+y-8=0$. Toạ độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow H(4;4)$. Ta có $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{2}$.

Suy ra: $\dfrac{IH}{MH}=\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{IH}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{HM} \Rightarrow I(5;3)$.

Vậy phương trình đường tròn (C) là: $(x-5)^2+(y-3)^2=10$.

Câu 31. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$.

Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B để diện tích tam giác IAB là lớn nhất

Trả lời: $m=-4$

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$.

Δ cắt (C) tại hai điểm phâ $\Leftrightarrow \frac{|\sqrt{2}-2m+1-\sqrt{2}|}{\sqrt{2+m^2}}<3 \Leftrightarrow |1-2m|\le 3\sqrt{2+m^2}$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m+1\le 9m^2+18$

$\Leftrightarrow 5m^2+4m+17>0$ (đúng với mọi m).

Vậy với mọi số thực m thì Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt.

Ta có: $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA\cdot IB\cdot \sin AIB=\frac{9}{2}\sin AIB\le \frac{9}{2}$ (vì $\sin AIB\le 1$).

Suy ra: $\left(S_{\Delta AB}\right)_{\max}=\frac{9}{2}$; khi đó $\sin AIB=1\Leftrightarrow AIB=90°$

Gọi H là hình chiếu của I lên $\Delta \Rightarrow AIH=45°\Rightarrow IH=IA\cdot\cos 45°=\frac{3}{\sqrt{2}}$

Ta có: $d(I,\Delta)=IH \Leftrightarrow \frac{|1-2m|}{\sqrt{2+m^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow m^2+8m+16=0\Leftrightarrow m=-4$.

Vậy với $m=-4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32. Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau: $(C_1): x^2+y^2-4y-5=0$ và $(C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0$.

Trả lời: $2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0; y+1=0; 4x-3y-9=0.$

Lời giải

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0;2)$ bán kính $R_1=3$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(3;-4)$ bán kính $R_2=3$.

Gọi tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình $\Delta: ax+by+c=0$ với $a^2+b^2\ne 0$.

Δ là tiếp tuyến chung của (C_1) và $(C_2)\Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1,\Delta)=3 \\ d(I_2,\Delta)=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c|=3\sqrt{a^2+b^2}\,(*) \\ |3a-4b+c|=3\sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Rightarrow |2b+c|=|3a-4b+c| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ c=\dfrac{-3a+2b}{2} \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $a=2b$; chọn $a=2\Rightarrow b=1$; thay vào $(*)$ ta được: $c=-2\pm 3\sqrt{5}$; suy ra phương trình hai tiếp tuyến là: $2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0$.

Trường hợp 2: $c=\frac{-3a+2b}{2}$; thay vào $(*)$ ta được:

$\left|2b+\frac{-3a+2b}{2}\right|=3\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow|2b-a|=2\sqrt{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow 4b^2-4ab+a^2=4a^2+4b^2\Leftrightarrow 3a^2+4ab=0\Leftrightarrow a(3a+4b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\3a=-4b\end{array}\right.$.

- Với $a=0$; chọn $b=1\Rightarrow c=1$.

Phương trình $\Delta: y+1=0$.

- Với $3a=-4b$; chọn $a=4\Rightarrow b=-3\Rightarrow c=-9$.

Phương trình: $\Delta: 4x-3y-9=0$.

Vậy có bốn tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình là:

$2x+y-2\pm3\sqrt{5}=0; y+1=0; 4x-3y-9=0.$

Câu 33. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+6x-4y+4=0$ và điểm $M(-2;3)$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt đường tròn tại 2 điểm A,B sao cho $AB=\frac{12}{\sqrt{5}}$.

Trả lời: $AB: 2x+y+1=0$ hoặc $AB: x+2y-4=0$

Lời giải

(C) $: x^2+y^2+6x-4y+4=0$.

(C) có tâm $I(-3;2)$, bán kính $R=3$.

Gọi H là trung điểm $AB\Rightarrow AH=\frac{AB}{2}=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

ΔIAH vuông tại H, ta có: $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $M(-2;3)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AB}}=(a;b)$ có dạng:
$a(x+2)+b(y-3)=0\Leftrightarrow ax+by+2a-3y=0$.

Ta có:

$IH=d[I,AB]\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{|-3a+2b+2a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow 9\left(a^2+b^2\right)=5\left(a^2+2ab+b^2\right)$

$\Leftrightarrow 2a^2-5ab+2b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2b\\a=\frac{1}{2}b\end{array}\right.$.

Chọn $b=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=4\\a=1\end{array}\right.$

Với $a=4; b=2$ thì $AB: 2x+y+1=0$.

Với $a=1; b=2$ thì $AB: x+2y-4=0$.

Câu 34. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(2;4)$.
Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt đường tròn tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm đoạn AB.

Trả lời: $x+y-6=0$.

Lời giải

Ta có (C) : $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ có tâm $I(1;3)$, bán kính $R=2$
$IM=\sqrt{(2-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2}<2=R$.

Vậy M nằm trong đường tròn (C).

Vì M là trung điểm đoạn AB nên

$AB \perp IM$

Vi $AB \perp IM \Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của AB là $\overrightarrow{n_{AB}}=\overrightarrow{IM}=(1;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $1(x-2)+1(y-4)=0 \Leftrightarrow x+y-6=0$.

Câu 35. Xét sự tương giao giữa đường tròn $(C): x^2+y^2-7x-y=0$ và đường thẳng $\Delta: x-y-3=0$. Tìm tọa độ giao điểm nếu có.

Trả lời: $A(1;-2)$ và $A(6;3)$.

Lời giải

$(C): x^2+y^2-7x-y=0$.

(C) có tâm $I\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Ta có $d[I,\Delta]=0$.

Vậy Δ đi qua tâm của (C) và cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

Tọa độ giao điểm Δ của đi qua tâm của (C) là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x-y-3=0 & (1) \\ x^2+y^2-7x-y=0 & (2) \end{cases}$

Từ $(1) \Leftrightarrow y=x-3$ thay vào (2) ta được:

$$x^2+(x-3)^2-7x-(x-3)=0 \Leftrightarrow 2x^2-14x+12=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-2 \\ x=6 \Rightarrow y=3 \end{array}\right..$$

Vậy Δ cắt (C) tại hai điểm $A(1;-2)$ và $A(6;3)$.

Câu 36. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-4y+4=0$, điểm $M(4;6)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua $M(4;6)$.

Trả lời: $(\Delta_1): x-4=0; (\Delta_2): 3x+4y+12=0$

Lời giải

(C) có tâm $I(2;2), R=2$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua $M(4;6)$.

Δ có dạng $Ax+By-4A-6B=0$

Δ là tiếp tuyến của $(C)\Rightarrow d[I,\Delta]=R$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2A+2B-4A-6B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2\Leftrightarrow |2A+4B|=2\sqrt{A^2+B^2}$

$\Leftrightarrow 4A^2+16B^2+16AB=4A^2+4B^2\Leftrightarrow 12A^2+16AB=0\Leftrightarrow 4B(3B+4A)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=0 \\ B=\dfrac{4A}{3}\cdot \end{array}\right.$

Chọn $A=3\Rightarrow \left[\begin{array}{l} B=0 \\ B=4 \end{array}\right.$.

Vậy $A=3,B=0\Rightarrow (\Delta_1): x-4=0; A=3,B=4\Rightarrow (\Delta_2): 3x+4y+12=0$.

Câu 37. Cho đtròn $(C): x^2+y^2-4x-4y+4=0$, điểm $M(4;6)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M cắt (C) tại 2 điểm A,B sao cho $AB=2$.

Trả lời: $\Delta_1: (\sqrt{51}-8)x+y+26-4\sqrt{51}=0$; $\Delta_2: (\sqrt{51}+8)x-y-26-4\sqrt{51}=0.$

Lời giải

Khi $AB=2$ thì ΔIAB đều do đó $d[I,AB]=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Đường thẳng đi qua M có dạng: $d: Ax+By-4A-6B=0$.

Ta có $d[I,AB]=d[I,d]=\sqrt{3}\Leftrightarrow |2A+4B|=\sqrt{3}\cdot\sqrt{A^2+B^2}\Leftrightarrow A^2+16AB+13B^2=0$.

Chọn $B=1$ ta được $\left[\begin{array}{l} A=-8+\sqrt{51} \\ A=-8-\sqrt{51} \end{array}\right.$.

$A=-8+\sqrt{51}, B=1\Rightarrow \Delta_1: (\sqrt{51}-8)x+y+26-4\sqrt{51}=0.$

$A=-8-\sqrt{51}, B=1\Rightarrow \Delta_2: (\sqrt{51}+8)x-y-26-4\sqrt{51}=0.$

Câu 38. Cho phương trình $x^2+y^2-2mx+4my+6m-1=0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình đường tròn?

Trả lời: $\left[\begin{array}{l} m<\dfrac{1}{5} \\ m>1 \end{array}\right.$

Lời giải

(1) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=m, b=-2m, c=6m-1$.

Vậy để (1) là phương trình đường tròn thì

$a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow m^2+4m^2-6m+1>0 \Leftrightarrow 5m^2-6m+1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<\dfrac{1}{5} \\ m>1 \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m<\dfrac{1}{5} \\ m>1 \end{array}\right.$ thì (1) trở thành phương trình đường tròn.

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với Ox, Oy.

Trả lời: $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ và $(x-5)^2+(y+5)^2=25$.

Lời giải

Gọi đường tròn cần tìm là $(I;R)$ với $I(a;b)$ là tâm đường tròn.

Đường tròn $(I;R)$ tiếp xúc với các trục $Ox;Oy$ nên

$d(I;Ox)=d(I;Oy)=R \Rightarrow |a|=|b|=R \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=R \\ a=-b=R \end{array}\right.$.

Nếu $a=b$ thì phương trình đường tròn có dạng $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

Mà điểm $A(2;-1) \in (I;R)$ nên $(2-a)^2+(-1-a)^2=a^2$ $\Rightarrow a^2-2a+5=0$ vô nghiệm.

Vậy trường hợp này không có giá trị thoả mãn.

Nếu $a=-b$ thì phương trình đường tròn có dạng $(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$

Mà điểm $A(2;-1) \in (I;R)$ nên $(2-a)^2+(-1+a)^2=a^2$

$\Rightarrow a^2-6a+5=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=5 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ và $(x-5)^2+(y+5)^2=25$.

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ, với $A(0;4), B(2;6), \Delta: x-2y+5=0$.

Trả lời: $(C): \left(x-\dfrac{7}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{11}{3}\right)^2=\dfrac{50}{9}$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2)$.

Đường trung trực d của đoạn AB đi qua $M(1;5)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1;1)$ là

$d: x+y-6=0.$

- Tâm I là giao điểm của d và Δ nên tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+y-6=0 \\ x-2y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{3} \\ y=\dfrac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{11}{3}\right).$$

- Bán kính: $R=IA=\sqrt{\left(0-\dfrac{7}{3}\right)^2+\left(4-\dfrac{11}{3}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$.

Vậy phương trình đường tròn là $(C):\left(x-\dfrac{7}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{11}{3}\right)^2=\dfrac{50}{9}$.

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+5)^2=4$ tại điểm $M(3;-5)$.

Trả lời: $d:x-3=0.$

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-5)$, bán kính $R=2.IM=\sqrt{(3-1)^2+(-5+5)^2}=2=R$ Do đó điểm $M(3;-5)$ thuộc đường tròn (C).

Tiếp tuyến của (C) tại $M(3;-5)$ có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM}=(2;0)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại $M(3;-5)$ là

$d:2(x-3)+0(y+5)=0 \Leftrightarrow d:x-3=0.$

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2+2x-6y+5=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $\Delta:x+2y-15=0$.

Trả lời: $\left[\begin{array}{l} d:x+2y=0 \\ d:x+2y-10=0 \end{array}\right.$

Lời giải

(C) có tâm $I(-1;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1+9-5}=\sqrt{5}, d:x+2y-m=0$.

d là tiếp tuyến của (C)

$$\Leftrightarrow d(I,d)=R \Leftrightarrow \dfrac{|-1+6-m|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |m-5|=5$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-5=-5 \\ m-5=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \Rightarrow d:x+2y=0 \\ m=10 \Rightarrow d:x+2y-10=0 \end{array}\right.$$

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm $A(1;3)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ A.

Trả lời: $x=1$ và $3x+4y-15=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$ bán kính $R=\sqrt{3^2+1-6}=2$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua A có dạng:

$a(x-1)+b(y-3)=0$ với ($a^2+b^2\neq 0$) hay $ax+by-a-3b=0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn

$$\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|3a-b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow (a-2b)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow 3b^2-4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 3b=4a \end{array}\right.$$

+ Nếu $b=0$, chọn $a=1$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $x=1$.

+ Nếu $3b=4a$, chọn $a=3,b=4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $3x+4y-15=0$.

Vậy qua A kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là $x=1$ và $3x+4y-15=0$.

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 4x+3y+m=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-9=0$. Tìm m để Δ và (C) tiếp xúc với nhau.

Trả lời: $m=\pm 15$

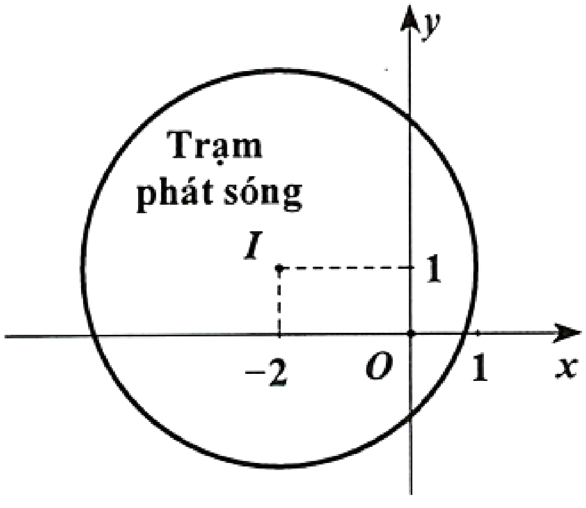
Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(0,0)$ và bán kính $R=3$.

Khoảng cách từ tâm $I(0,0)$ đến đường thẳng Δ là $d(I;\Delta)=\frac{|m|}{5}$.

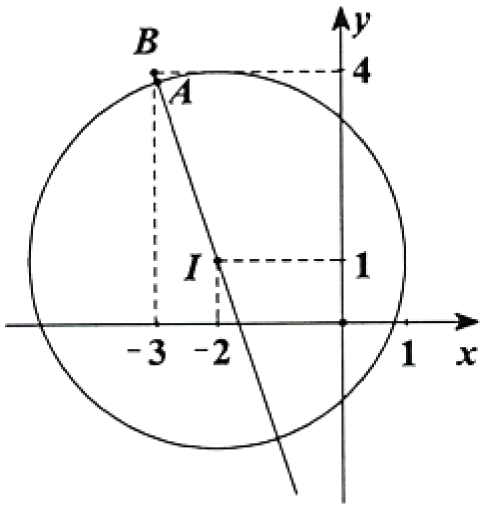
Δ tiếp xúc $(C) \Leftrightarrow d(I;\Delta)=3 \Leftrightarrow \frac{|m|}{5}=3 \Leftrightarrow |m|=15 \Leftrightarrow m=\pm 15$.

Câu 45. Hình vẽ bên dưới mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có tọa độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng toạ độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét). Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng $3km$.



Trả lời: 0,16

Lời giải



Đường tròn màu đỏ mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng có tâm $I(-2;1)$ và bán kính phủ sóng $3km$ nên phương trình đường tròn đó là: $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

Giả sử vị trí đứng của người đó là $B(-3;4)$.

Gọi A (như trên hình vẽ) là giao điểm thứ nhất của đường tròn tâm I và BI

$\Rightarrow$ Khoảng cách ngắn nhất để người đó di chuyển được từ vị trí $B(-3;4)$ tới vùng phủ sóng là BA

Ta có: $IB=\sqrt{(-3+2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$, suy ra $AB=IB-IA=\sqrt{10}-3=0,16$.