CÂU HỎI

Câu 1. Cho parabol (P) có tiêu điểm $F(1;0)$ và đường thẳng $d: x+6m=0$. Xác định m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Trả lời: ……………………………..

Câu 2. Cho parabol $(P): y^2=2x$. Tìm những điểm thuộc (P) sao cho khoảng cách từ điểm đó đến tiêu điểm của (P) bằng 4.

Trả lời: ……………………………..

Câu 3. Tìm tọa độ điểm M thuộc elip $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ sao cho M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc 60°.

Trả lời: ……………………………..

Câu 4. Tìm toạ độ điểm N thuộc hypebol $(H): \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ sao cho N nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông.

Trả lời: ……………………………..

Câu 5. Bạn An cùng một lúc bắn hai phát súng về đích A và đích B cách nhau $400\,m$. Biết vận tốc trung bình của viên đạn là $760\,m/s$. Viên đạn bắn về đích A nhanh hơn viên đạn bắn về đích B là 0,5 giây. Hỏi những vị trí mà bạn An đứng để có thể đạt được kết quả bắn tương tự như trên thuộc đường conic nào? Viết phương trình chính tắc của đường conic đó.

Trả lời: ……………………………..

Câu 6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm M chuyển động trên đường elip (E) : $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của OM.

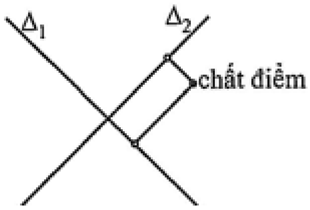
Trả lời: ……………………………..

Câu 7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm M chuyển động trên đường elip (E) : $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của DM, trong đó $D(6;0)$.

Trả lời: ……………………………..

Câu 8. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau.

Một chất điểm chuyển động trong một góc vuông tạo bởi Δ_1 và Δ_2 (Hình) có tính chất: ở mọi thời điểm, tích khoảng cách từ mỗi vị trí của chất điểm đến hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 luôn bằng 4. Biết rằng chất điểm chuyển động trên một phần của đường hypebol. Tìm đường hypebol đó.



Trả lời: ……………………………..

Câu 9. Cho elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm những điểm M thuộc (E) sao cho nó nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông.

Trả lời: ……………………………..

Câu 10. Cho elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho góc $F_1MF_2=60^\circ$.

Trả lời: ……………………………..

Câu 11. Cho elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

Trả lời: ……………………………..

Câu 12. Cho hai điểm $F_1(-\sqrt{2};-\sqrt{2}), F_2(\sqrt{2};\sqrt{2})$. Với mọi điểm $M(x;y)$ nằm trên đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x}$, ta đều có $|MF_1-MF_2|=a$. Khi đó $a=?$

Trả lời: ……………………………..

Câu 13. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết (P) có phương trình đường chuẩn Δ song song và cách đường thẳng $d: x=2$ một khoảng bằng 5.

Trả lời: ……………………………..

Câu 14. Một nhà vòm chứa máy bay có mặt cắt hình nửa elip cao $8m$, rộng $20m$.
Tính khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường $5\ m$ lên đến nóc nhà vòm.

Trả lời: ……………………………..

Câu 15. Một cái tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{28^2}-\frac{y^2}{42^2}=1$. Biết chiều cao của tháp là $150m$ và khoảng cách từ nóc tháp đến đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{2}{3}$ lần khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

Trả lời: ……………………………..

Câu 16. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) biết rằng:

(H) có tiêu cự bằng $2\sqrt{13}$ và đi qua điểm điểm $M\left(\frac{3\sqrt{5}}{2};-1\right)$.

Trả lời: ……………………………..

Câu 17. Lập phương trình chính tắc của elip, biết Elip có hai đỉnh trên trục nhỏ cùng với hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông có diện tích bằng 32 .

Trả lời: …………………………….

Câu 18. Lập phương trình chính tắc của elip, biết Elip đi qua điểm $M(2\sqrt{3};2)$ và M nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc vuông.

Trả lời: …………………………….

Câu 19. Cho elip có phương trình chính tắc (E) : $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. Gọi F_1,F_2 là hai tiêu điểm của (E) trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1-MF_2=2$.

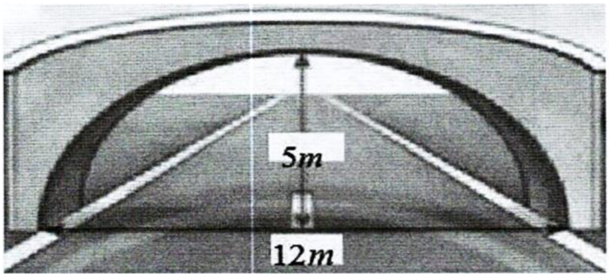
Trả lời: …………………………….

Câu 20. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

(E) đi qua $M(5;0)$ và $N\left(\frac{5\sqrt{15}}{4};1\right)$.

Trả lời: …………………………….

Câu 21. Một đường hầm có mặt cắt nửa hình elip cao $5m$, rộng $12m$. Viết phương trình chính tắc của elip đó?



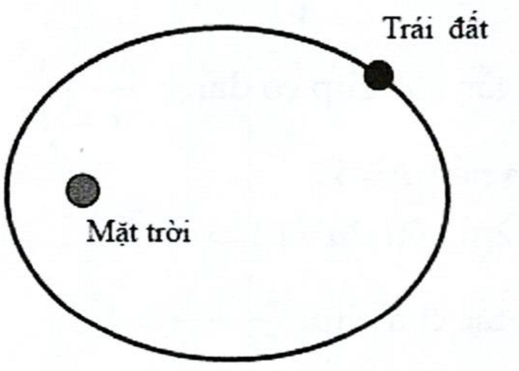
Trả lời: …………………………….

Câu 22. Trên mặt phẳng, cho tam giác ABC có $A(-2;-2),B(-2;2),C(6;2)$.

Tìm tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn hệ thức $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|+|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}|=12$.

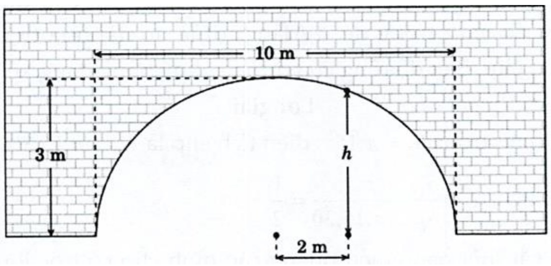
Trả lời: ……………………………

Câu 23. Một elip với bán trục lớn a và bán tiêu cự c tỉ số $e=\frac{c}{a}$ được gọi là tâm sai của elip. Quỹ đạo của trái đất quanh mặt trời là một elip (E) trong đó mặt trời là một trong các tiêu điểm. Biết khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất giữa mặt trời và trái đất lần lượt là 147 triệu km, 152 triệu km. Tính tâm sai của elip (E)?



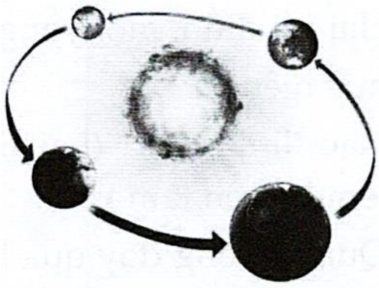
Trả lời: ……………………………

Câu 24. Mái vòm của một đường hầm có hình bán elip. Chiều rộng của đường hầm là $10m$, điểm cao nhất của mái vòm là $3m$. Gọi h là chiều cao của mái vòm tại điểm cách tâm của đường hầm $2m$. Tính h ?



Trả lời: ……………………………

Câu 25. Các hành tinh và các sao chổi khi chuyển động xung quanh mặt trời có quỹ đạo là một đường elip trong đó tâm mặt trời là một tiêu điểm. Điểm gần mặt trời nhất gọi là điểm cận nhật, điểm xa mặt trời nhất gọi là điểm viễn nhật. Trái đất chuyển động xung quanh mặt trời theo quỹ đạo là một đường elip có độ dài nửa trục lớn bằng $93.000.000$ dặm. Tỉ số khoảng cách giữa điểm cận nhật và điểm viễn nhật đến mặt trời là $\frac{59}{61}$. Tính khoảng cách từ trái đất đến mặt trời khi trái đất ở điểm cận nhật. Lấy giá trị gần đúng.



Trả lời: ……………………………

Câu 26. Ông Hoàng có một mảnh vườn hình elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là $60m$ và $30m$. Ông chia thành hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với elip để làm mục đích sử dụng khác nhau. Nửa bên trong đường tròn ông trông cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phân trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích elip được tính theo công thức $S = \pi ab$ trong đó a, b lân lượt là đọ dài nửa trục lớn và nửa trục bé của elip. Biết độ rộng của đường elip không đáng kể.

Trả lời: ……………………………

Câu 27. Cho $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và $d: y = x + k$. Với giá trị nào của k thì (d) có điểm chung với (E) ?

Trả lời: ……………………………

Câu 28. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng chu vi của hình chữ nhật cơ sở bằng 20 và $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Trả lời: ……………………………

Câu 29. Cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho góc $F_1MF_2 = 60^\circ$ với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E)

Trả lời: ……………………………

Câu 30. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết một đỉnh và hai tiêu điểm của (E) tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) là $12(2+\sqrt{3})$.

Trả lời: ……………………………

Câu 31. Cho Parabol $(P): y^2 = 16x$ và đường thẳng $(d): x = a (a > 0)$. Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $AOB = 120^\circ$.

Trả lời: ……………………………

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của parabol (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$.

Trả lời: ……………………………

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H) có một tiêu điểm là $F_2(6;0)$ và đi qua điểm $A_2(4;0)$.

Trả lời: ……………………………

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elíp biết độ dài trục bé là 6 và tiêu cự là 8 .

Trả lời: ……………………………

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip, biết tỉ số trục bé và trục lớn bằng $\frac{1}{\sqrt{5}}$ và biết elip đi qua điểm $M(\sqrt{15};-1)$.

Trả lời: ……………………………

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua hai điểm $M(0;3)$ và $N\left(3;-\frac{12}{5}\right)$.

Trả lời: ……………………………

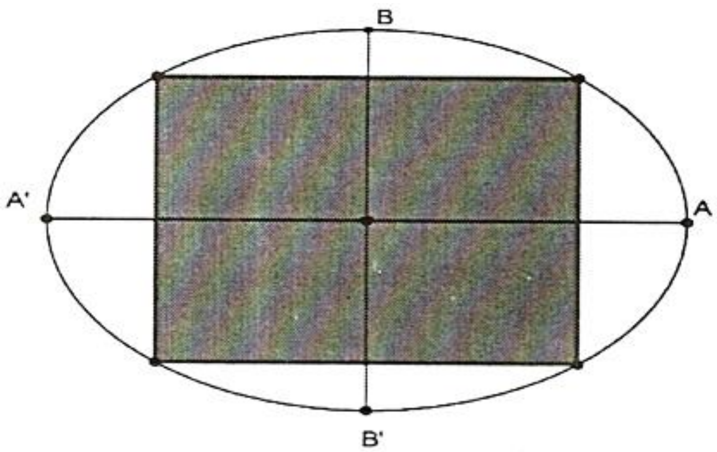
Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $(C): x^2+y^2=4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A,B,C,D của hình thoi với điểm A nằm trên trục Ox.

Trả lời: ……………………………

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta: x+y-12=0$ bằng $2\sqrt{2}$.

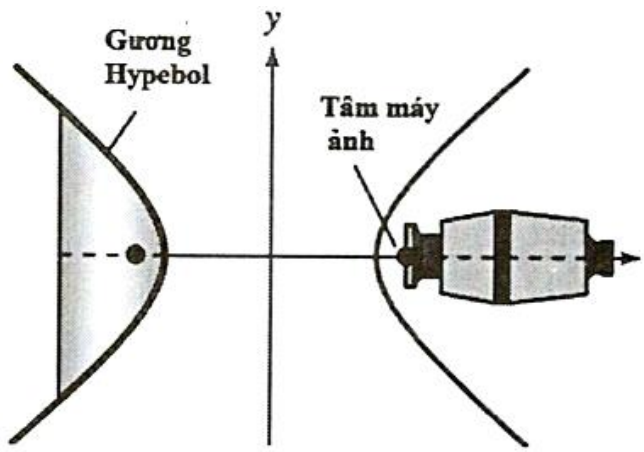
Trả lời: ……………………………

Câu 39. Một mảnh đất hình Elip có độ dài trục lớn bằng $120m$, độ dài trục bé bằng $90m$. Tập đoàn VinGroup dự định xây dựng một trung tâm thương mại Vincom trong một hình chữ nhật nội tiếp của Eip như hình vẽ. Tính diện tích xây dựng Vincom lớn nhất.



Trả lời: ……………………………

Câu 40. Để chụp toàn cảnh, ta có thể sử dụng một gương hypebol. Máy ảnh được hướng về phía đỉnh của gương và tâm quang học của máy ảnh được đặt tại một tiêu điểm của gương (xem hình). Tìm khoảng cách từ quang tâm của máy ảnh đến đỉnh của gương, biết rằng phương trình cho mặt cắt của gương là $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.



Trả lời: ……………………………….

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho parabol (P) có tiêu điểm $F(1;0)$ và đường thẳng $d: x+6m=0$. Xác định m để parabol (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Trả lời: $m<0$

Lời giải

Gọi phương trình parabol (P) có dạng: $y^2=2px(p>0)$.

Parabol (P) có tiêu điểm $F(1;0) \Rightarrow \frac{p}{2}=1 \Rightarrow p=2 \Rightarrow y^2=4x \Rightarrow x=\frac{y^2}{4}$.

Ta có phương trình đường thẳng $d: x+6m=0 \Rightarrow x=-6m$.

Phương trình tung độ giao điểm của (P) và d là: $\frac{y^2}{4}=-6m \Leftrightarrow y^2=-24m$. (*)

Để (P) và d có hai giao điểm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân

biệt hay $-24m>0 \Leftrightarrow m<0$.

Câu 2. Cho parabol $(P): y^2=2x$. Tìm những điểm thuộc (P) sao cho khoảng cách từ điểm đó đến tiêu điểm của (P) bằng 4.

Trả lời: $M\left(\frac{7}{2};\sqrt{7}\right)$ hoặc $M\left(\frac{7}{2};-\sqrt{7}\right)$.

Lời giải

Parabol (P) có đường chuẩn là $\Delta: x+\frac{1}{2}=0$ và tiêu điểm $F\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cần tìm. Có $M\in(P)$ nên $y_0^2=2x_0 \Rightarrow x_0=\frac{1}{2}y_0^2 \Rightarrow x_0\geq 0$.

Khoảng cách từ M đến tiêu điểm F bằng 4 nên $MF=d(M;\Delta)=\frac{\left|x_0+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2}}=4$.

$\Rightarrow x_0=\frac{7}{2}$ hoặc $x_0=\frac{-9}{2}$. Mà $x_0\geq 0$ nên $x_0=\frac{7}{2} \Rightarrow y_0^2=7 \Rightarrow y_0=\pm\sqrt{7}$.

Vậy $M\left(\frac{7}{2};\sqrt{7}\right)$ hoặc $M\left(\frac{7}{2};-\sqrt{7}\right)$.

Câu 3. Tìm tọa độ điểm M thuộc elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ sao cho M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc 60°.

Trả lời: $\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4};-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right),\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right),\left(\frac{5\sqrt{13}}{4};-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right),\left(\frac{5\sqrt{13}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

Lời giải

Từ phương trình chính tắc của elip (E) ta có $a=5, b=3, c=4$.

Elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-4;0), F_2(4;0)$ và $F_1F_2 = 2c = 8$.

Gọi $M\left(x_0; y_0\right)$ là điểm cần tìm.

Có $MF_1^2 - MF_2^2 = \left(x_0+4\right)^2 + y_0^2 - \left[\left(x_0-4\right)^2 + y_0^2\right] = 16x_0$.

Lại có, $M \in (E)$ nên $MF_1 + MF_2 = 2a = 10$. (1)

Có $MF_1 - MF_2 = \dfrac{MF_1^2 - MF_2^2}{MF_1 + MF_2} = \dfrac{16x_0}{10} = \dfrac{8}{5}x_0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MF_1 = 5 + \dfrac{4}{5}x_0; MF_2 = 5 - \dfrac{4}{5}x_0$.

Áp dụng định lí côsin cho ΔMF_1F_2, ta được:

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow 64 = \left(5 + \frac{4}{5}x_0\right)^2 + \left(5 - \frac{4}{5}x_0\right)^2 - 2\left(5 + \frac{4}{5}x_0\right)\left(5 - \frac{4}{5}x_0\right) \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 64 = 25 + \frac{48}{25}x_0^2$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{5\sqrt{13}}{4} \text{ hoặc } x_0 = \frac{-5\sqrt{13}}{4}.$$

Từ đó tính được $y_0^2 = \dfrac{27}{16} \Rightarrow y_0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ hoặc $y_0 = \dfrac{-3\sqrt{3}}{4}$.

Vậy có bốn điểm M thoả yêu cầu bài toán là:

$$\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), \left(-\frac{5\sqrt{13}}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{5\sqrt{13}}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{5\sqrt{13}}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

Câu 4. Tìm toạ độ điểm N thuộc hypebol $(H): \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ sao cho N nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông.

Trả lời: $\left(-\dfrac{4\sqrt{34}}{5}; -\dfrac{9}{5}\right), \left(-\dfrac{4\sqrt{34}}{5}; \dfrac{9}{5}\right), \left(\dfrac{4\sqrt{34}}{5}; -\dfrac{9}{5}\right), \left(\dfrac{4\sqrt{34}}{5}; \dfrac{9}{5}\right)$

Lời giải

Từ phương trình chính tắc của hypebol (H) ta có $a = 4, b = 3, c = 5$.

Hypebol (H) có tiêu cự là $F_1F_2 = 2c = 10$.

Gọi $N\left(x_0; y_0\right)$ là điểm cần tìm. Ta có $N \in (H)$ nên $\dfrac{x_0^2}{16} - \dfrac{y_0^2}{9} = 1.$ (1)

Theo đề bài, ta có ΔNF_1F_2 vuông tại N, có O là trung điểm của F_1F_2 (với O là gốc tọa độ) nên

$$ON = \frac{F_1F_2}{2} = c = 5 \Rightarrow ON^2 = 25 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 25 \Rightarrow y_0^2 = 25 - x_0^2 \text{ (2)}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$\frac{x_0^2}{16}-\frac{25-x_0^2}{9}=1\Leftrightarrow 9x_0^2-400+16x_0^2=144\Leftrightarrow 25x_0^2=544\Leftrightarrow x_0^2=\frac{544}{25}$

$\Leftrightarrow x_0=\frac{4\sqrt{34}}{5}$ hoặc $x_0=\frac{-4\sqrt{34}}{5}$.

Từ đó tính được $y_0^2=\frac{81}{25}\Rightarrow y_0=\frac{9}{5}$ hoặc $y_0=\frac{-9}{5}$.

Vậy có bốn điểm N thoả yêu cầu bài toán là:

$\left(-\frac{4\sqrt{34}}{5};-\frac{9}{5}\right),\left(-\frac{4\sqrt{34}}{5};\frac{9}{5}\right),\left(\frac{4\sqrt{34}}{5};-\frac{9}{5}\right),\left(\frac{4\sqrt{34}}{5};\frac{9}{5}\right)$.

Câu 5. Bạn An cùng một lúc bắn hai phát súng về đích A và đích B cách nhau $400m$. Biết vận tốc trung bình của viên đạn là $760m/s$. Viên đạn bắn về đích A nhanh hơn viên đạn bắn về đích B là 0,5 giây. Hỏi những vị trí mà bạn An đứng để có thể đạt được kết quả bắn tương tự như trên thuộc đường conic nào? Viết phương trình chính tắc của đường conic đó.

Trả lời: $\frac{x^2}{36100}-\frac{y^2}{3900}=1$

Lời giải

Gọi $s_A,s_B(m)$ lần lượt là quãng đường cần để viên đạn bắn về đích A, đích B.

Theo để bài, ta có $s_A-s_B=760\cdot 0,5=380(m)$. Lại có, khoảng cách giữa đích A và đích B là $400m$, do đó những vị trí mà bạn An đúng thuộc hypebol với hai tiêu điểm là A và B.

Đặt hệ trục toạ độ Oxy với O là trung điểm của AB, Ox trùng với AB và mỗi đơn vị trên hệ trục toạ độ ứng với $1m$ trên thực tế. Khi đó, ta có $A(-200;0)$ và $B(200;0)$, tiêu cự của hypebol là $2c=AB=400$ (hay $c=200$).

Gọi M là vị trí mà bạn An đứng để có thể đạt được kết quả bắn theo đề bài.

Tập hợp các điểm M thoả mãn $|MA-MB|=2a=380$ (hay $a=190$) là hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{190^2}-\frac{y^2}{200^2-190^2}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{36100}-\frac{y^2}{3900}=1$.

Câu 6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm M chuyển động trên đường elip (E) : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của OM .

Trả lời: giá trị nhỏ nhất bằng 4 và đạt giá trị lớn nhất bằng 5 .

Lời giải

Giả sử $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đường elip. Ta có: $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{16}=1$.

Vì $x_0^2 \ge 0, y_0^2 \ge 0$ nên $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{25} \le \frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{16} \le \frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{16} \Rightarrow \frac{x_0^2+y_0^2}{25} \le 1 \le \frac{x_0^2+y_0^2}{16}$

$\Rightarrow 16 \le x_0^2+y_0^2 \le 25 \Rightarrow 4 \le \sqrt{x_0^2+y_0^2} \le 5 \Rightarrow 4 \le OM \le 5$

M thuộc (E) và $OM=4$ khi M có toạ độ $(0;-4)$ hoặc $(0;4)$.

M thuộc (E) và $OM=5$ khi M có toạ độ $(-5;0)$ hoặc $(5;0)$.

Vậy OM đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 và đạt giá trị lớn nhất bằng 5 .

Câu 7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm M chuyển động trên đường elip (E) : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của DM, trong đó $D(6;0)$.

Trả lời: giá trị nhỏ nhất bằng 1 và đạt giá trị lớn nhất bằng 11

Lời giải

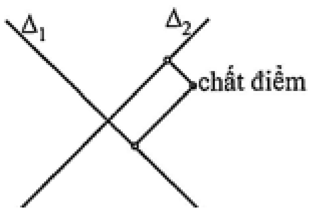
Ta có: $\begin{cases} DO-OM \le DM \le DO+OM \\ OM \le 5, DO=6 \end{cases} \Rightarrow 6-5 \le DM \le 6+5 \Rightarrow 1 \le DM \le 11$

$DM=1$ khi M có toạ độ $(5;0), DM=11$ khi M có toạ độ $(-5;0)$.

Vậy DM đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 và đạt giá trị lớn nhất bằng 11 .

Câu 8. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau.

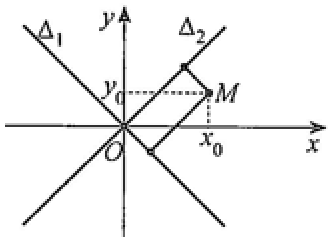
Một chất điểm chuyển động trong một góc vuông tạo bởi Δ_1 và Δ_2 (Hình) có tính chất: ở mọi thời điểm, tích khoảng cách từ mỗi vị trí của chất điểm đến hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 luôn bằng 4 . Biết rằng chất điểm chuyển động trên một phần của đường hypebol. Tìm đường hypebol đó.



Trả lời: $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$

Lời giải

Xét hệ trục toạ độ Oxy như Hình, trong đó các trục Ox, Oy lần lượt là các đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2. Phương trình hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt là $\Delta_1: x+y=0$ và $\Delta_2: x-y=0$.



Giả sử chất điểm ở vị trí $M\left(x_0; y_0\right)$ và chỉ chuyển động trong một góc vuông tương ứng với miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases}$ (điểm có toạ độ $(1;0)$ thuộc miền nghiệm của cả hai bất phương trình $x+y>0$ và $x-y>0$.

Khoảng cách từ M đến hai đường thẳng $\Delta_1: x+y=0$ và $\Delta_2: x-y=0$ lần lượt là:

$d\left(M,\Delta_1\right)=\frac{\left|x_0+y_0\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|x_0+y_0\right|}{\sqrt{2}}=\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}$; $d\left(M,\Delta_2\right)=\frac{\left|x_0-y_0\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|x_0-y_0\right|}{\sqrt{2}}=\frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $d\left(M,\Delta_1\right)\cdot d\left(M,\Delta_2\right)=\frac{x_0+y_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x_0-y_0}{\sqrt{2}}=\frac{x_0^2-y_0^2}{2}$. Do đó

$d\left(M,\Delta_1\right)\cdot d\left(M,\Delta_2\right)=4 \Leftrightarrow \frac{x_0^2-y_0^2}{2}=4 \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{8}-\frac{y_0^2}{8}=1$. Vậy chất điểm M chuyển động trên một phần của đường hypebol $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.

Câu 9. Cho elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm những điểm M thuộc (E) sao cho nó nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông.

Trả lời: $\left(\pm\frac{3\sqrt{14}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\left(\pm\frac{3\sqrt{14}}{4};-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

Lời giải:

Ta có: $a^2=9 \Rightarrow a=3; b^2=1 \Rightarrow b=1; c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{2} \Rightarrow F_1F_2=4\sqrt{2}$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$ thì $MF_1=a+\frac{c}{a}x=3+\frac{2\sqrt{2}}{3}x, MF_2=a-\frac{c}{a}x=3-\frac{2\sqrt{2}}{3}x$.

Ta có $F_1MF_2=90^\circ$ nên $F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2$

$\Leftrightarrow (4\sqrt{2})^2=\left(3+\frac{2\sqrt{2}}{3}x\right)^2+\left(3-\frac{2\sqrt{2}}{3}x\right)^2$

$\Leftrightarrow 32=18+2\cdot\frac{8}{9}\cdot x^2$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{63}{8} \Leftrightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{14}}{4}$

Thay vào (E), ta được: $y^2=\frac{1}{8} \Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Vậy có bốn điểm M thỏa mãn là $\left(\pm\frac{3\sqrt{14}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\left(\pm\frac{3\sqrt{14}}{4};-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Câu 10. Cho elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ với hai tiêu điểm F_1,F_2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho góc $F_1MF_2=60^\circ$.

Trả lời: $\left(\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\dfrac{1}{3}\right),\left(\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

Lời giải:

Ta có $a^2=4\Rightarrow a=2;b^2=1\Rightarrow b=1;c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}\Rightarrow F_1F_2=2\sqrt{3}$.

Gọi $M(x;y)\in(E)$ thì $MF_1=a+\dfrac{c}{a}x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x, MF_2=a-\dfrac{c}{a}x=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

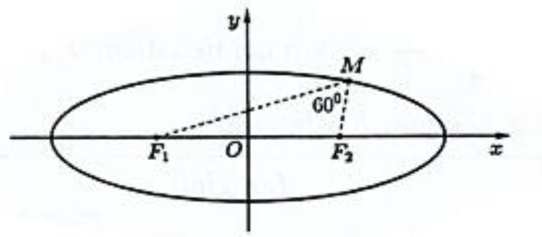
Ta có: $F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1\cdot MF_2\cdot\cos 60^\circ$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{3})^2=\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2-2\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 12=4+2\sqrt{3}x+\frac{3}{4}x^2+4-2\sqrt{3}x+\frac{3}{4}x^2-\left(4-\frac{3}{4}x^2\right)\Leftrightarrow 8=\frac{9}{4}x^2\Leftrightarrow x=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Thay vào (E), ta được: $\dfrac{32}{9.4}+y^2=1\Leftrightarrow y^2=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow y=\pm\dfrac{1}{3}$.

Vậy có bốn điểm M thỏa mãn là: $\left(\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3};\dfrac{1}{3}\right),\left(\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

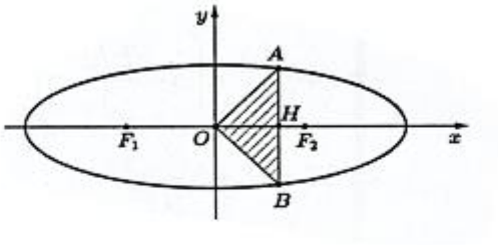


Câu 11. Cho elip $(E):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

Trả lời: $A\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),B\left(\sqrt{2};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),B\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Lời giải

Do tam giác OAB cân tại O và hai điểm A,B có hoành độ dương nên A,B đối xứng nhau qua Ox



Giả sử $A(x;y)$ với $x>0$, suy ra $B(x;-y)$. Gọi H là hình chiếu của O trên AB. Khi đó $: S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}AB\cdot OH=\frac{1}{2}|2y|x=x|y|$.

Theo bất đẳng thức AM-GM : $1=\frac{x^2}{4}+y^2\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{4}\cdot y^2}=2\cdot\frac{x}{2}\cdot|y|=x|y|\,(x>0)$.

Do đó $S_{\Delta OAB}=x|y|\leq 1$. Dấu " =" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{x^2}{4}=y^2$.

Thay vào $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, ta được: $y^2+y^2=1\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}$.

Vậy $A\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),B\left(\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),B\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Câu 12. Cho hai điểm $F_1(-\sqrt{2};-\sqrt{2}),F_2(\sqrt{2};\sqrt{2})$. Với mọi điểm $M(x;y)$ nằm trên đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x}$, ta đều có $|MF_1-MF_2|=a$. Khi đó $a=?$

Trả lời: $2\sqrt{2}$

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ thuộc đồ thị hàm $y=\frac{1}{x}\Rightarrow M\left(x;\frac{1}{x}\right)$.

$$MF_1=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{x^2+2\sqrt{2}x+2+\frac{1}{x^2}+\frac{2\sqrt{2}}{x}+2}$$

$$=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^2}=\left|x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right|;MF_2=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{x^2-2\sqrt{2}x+2+\frac{1}{x^2}-\frac{2\sqrt{2}}{x}+2}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2}=\left|x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right|$$

Trường hợp 1: $x>0$, ta có $MF_1=x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}>0$; $x+\frac{1}{x}\geq 2\Rightarrow x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}>0\Rightarrow MF_2=x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}>0$.

Khi đó : $|MF_1-MF_2|=2\sqrt{2}$.

Trường hợp 2: $x<0$, ta có $MF_2=-x-\frac{1}{x}+\sqrt{2}$;

$-x+\frac{-1}{x}\ge 2\Rightarrow x+\frac{1}{x}\le -2\Rightarrow x+\frac{1}{x}<-\sqrt{2}\Rightarrow x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}<0$.

Suy ra: $MF_1=-x-\frac{1}{x}-\sqrt{2}$. Khi đó: $|MF_1-MF_2|=2\sqrt{2}$.

Vậy với mọi x khác 0, ta có $|MF_1-MF_2|=2\sqrt{2}$.

Câu 13. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết (P) có phương trình đường chuẩn Δ song song và cách đường thẳng $d:x=2$ một khoảng bằng 5.

Trả lời: $y^2=12x$

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc (P) : $y^2=2px(p>0)$.

Phương trình đường chuẩn có dạng $\Delta: x=-\frac{p}{2}$.

Theo giả thiết: $d(d,\Delta)=5\Leftrightarrow\left|\frac{-p}{2}-2\right|=5\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{p}{2}-2=5\\-\frac{p}{2}-2=-5\end{array}\right.\Rightarrow p=6>0$.

Vậy phương trình chính tắc (P) là: $y^2=12x$.

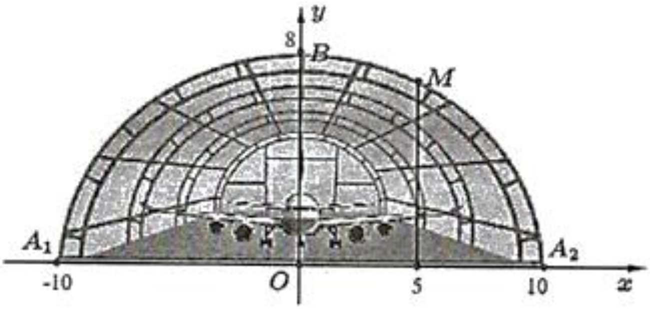
Câu 14. Một nhà vòm chứa máy bay có mặt cắt hình nửa elip cao $8m$, rộng $20m$.
Tính khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường $5\ m$ lên đến nóc nhà vòm.

Trả lời: $6,928m$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, gọi phương trình chính tắc elip là

$(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0,y\ge 0)$. Ta có $:2a=20\Rightarrow a=10,b=8$.



Vậy phương trình elip mô tả nhà vòm là $(E):\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1 (y\ge 0)$.

Gọi M là điểm thuộc (E) có hoành độ bằng 5 (hoặc -5), chiều cao cần tìm chính là tung độ của điểm M.

Thay hoành độ M vào phương trình $(E):\dfrac{(\pm 5)^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$

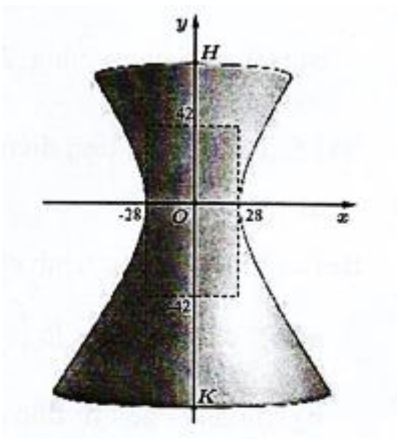
$\Rightarrow y^2=48 \Rightarrow y=4\sqrt{3}\approx 6,928m.$

Câu 15. Một cái tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\dfrac{x^2}{28^2}-\dfrac{y^2}{42^2}=1$. Biết chiều cao của tháp là $150m$ và khoảng cách từ nóc tháp đến đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\dfrac{2}{3}$ lần khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

Trả lời: bán kính nóc của tháp xấp xỉ $48,826m$, bán kính đáy của tháp xấp xỉ 66,212 m.

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Ta có : $\begin{cases} HK = 150 \\ OH = \dfrac{2}{3}OK \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OH + OK = 1 \\ OH = \dfrac{2}{3}OK \end{cases} \Rightarrow OH = 60m, OK = 90m$.

Đường thẳng qua H, vuông góc Oy là $\Delta_1 : y = 60$.

Δ_1 cắt hypebol tại điểm có hoành độ dương và thỏa mãn $\dfrac{x^2}{28^2} - \dfrac{60^2}{42^2} = 1 \Rightarrow x = 4\sqrt{149} \approx 48,826m$.

Đường thẳng qua K, vuông góc với Oy là $\Delta_2 : y = -90$.

Δ_2 cắt hypebol tại điểm có hoành độ dương và thỏa mãn $\dfrac{x^2}{28^2} - \dfrac{90^2}{42^2} = 1$

$\Rightarrow x = 4\sqrt{274} \approx 66,212m.$

Vậy bán kính nóc của tháp xấp xỉ $48,826m$, bán kính đáy của tháp xấp xỉ 66,212 m.

Câu 16. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) biết rằng:

(H) có tiêu cự bằng $2\sqrt{13}$ và đi qua điểm điểm $M\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{2}; -1\right)$.

Trả lời: $(H): \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của hypebol là $(H): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có: $2c = 2\sqrt{13} \Rightarrow c = \sqrt{13} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow a^2 = 13 - b^2$ (1).

(H) qua $M\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{2}; -1\right)$ nên $\dfrac{45}{4a^2} - \dfrac{1}{b^2} = 1$. Suy ra: $\dfrac{45}{4\left(13 - b^2\right)} - \dfrac{1}{b^2} = 1$

$\Rightarrow 45b^2 - 4\left(13 - b^2\right) = 4b^2\left(13 - b^2\right) \Rightarrow 4b^4 - 3b^2 - 52 = 0 \Rightarrow b^2 = 4, a^2 = 9$.

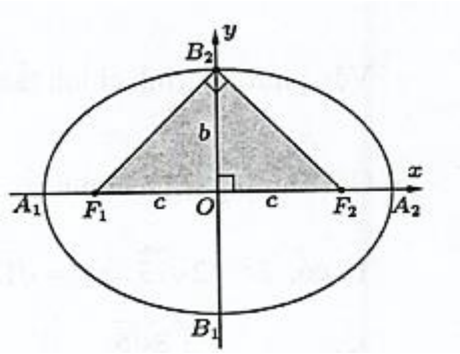
Vậy phương trình chính tắc của hypebol là $(H): \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Câu 17. Lập phương trình chính tắc của elip, biết Elip có hai đỉnh trên trục nhỏ cùng với hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông có diện tích bằng 32 .

Trả lời: $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a^2 = b^2 + c^2 (a, b, c > 0)$.



Hai đỉnh trên trục nhỏ và hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông nên $b=c$.

Mặt khác, diện tích hình vuông bằng 32 nên $2c.2b=32 \Leftrightarrow b^2=8$.

Suy ra $a^2=b^2+c^2=16$.

Vậy Elip cần tìm có phương trình chính tắc $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$.

Câu 18. Lập phương trình chính tắc của elip, biết Elip đi qua điểm $M(2\sqrt{3};2)$ và M nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc vuông.

Trả lời: $(E):\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (a>b>0)$.

Gọi hai tiêu điểm (E) là $F_1(-c;0), F_2(c;0)$.

Khi đó: $\overrightarrow{MF_1}=(-c-2\sqrt{3};-2), \overrightarrow{MF_2}=(c-2\sqrt{3};-2)$.

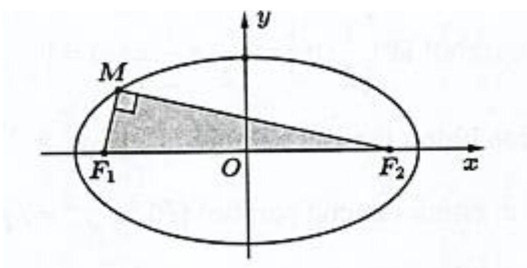
Ta có: $MF_1 \perp MF_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0 \Leftrightarrow (-c-2\sqrt{3})(c-2\sqrt{3})+4=0 \Leftrightarrow c^2=16$.

Suy ra $a^2-b^2=16 \Rightarrow a^2=16+b^2$ (*)

Hơn nữa (E) qua $M(2\sqrt{3};2)$ nên $\frac{12}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{12}{b^2+16}+\frac{4}{b^2}=1$(do (*))

$\Leftrightarrow 12b^2+4b^2+64=b^4+16b^2 \Leftrightarrow b^4=64 \Leftrightarrow b^2=8$. Suy ra $a^2=b^2+c^2=24$.

Vậy elip cần tìm có phương trình chính tắc $(E):\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$.



Câu 19. Cho elip có phương trình chính tắc (E) : $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E) trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1 - MF_2 = 2$.

Trả lời: $M(\sqrt{2};-\sqrt{3})$ hoặc $M(\sqrt{2};\sqrt{3})$.

Lời giải:

Ta có $a^2=8 \Rightarrow a=2\sqrt{2}; b^2=4 \Rightarrow b=2; c^2=a^2-b^2=4 \Rightarrow c=2$.

Gọi $M(x;y)\in(E) \Rightarrow MF_1 = a+\frac{c}{a}x = 2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x, MF_2 = 2\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}x$

$$MF_1 - MF_2 = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x-\left(2\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

Thay vào $(E): \frac{2}{8}+\frac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow y^2=3 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}$.

Vậy $M(\sqrt{2};-\sqrt{3})$ hoặc $M(\sqrt{2};\sqrt{3})$.

Câu 20. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

(E) đi qua $M(5;0)$ và $N\left(\frac{5\sqrt{15}}{4};1\right)$.

Trả lời: $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Lời giải

Phương trình chính tắc của Elip (E) có dạng:

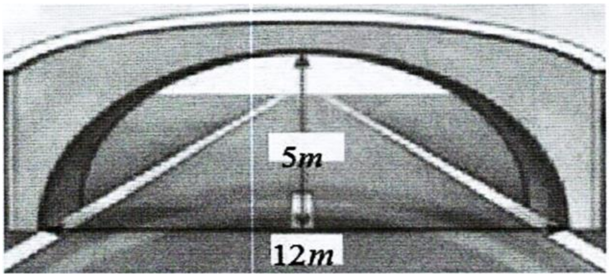
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a^2=b^2+c^2; a,b,c>0\right)$$

Do $M(5;0)$ và $N\left(\frac{5\sqrt{15}}{4};1\right)\in(E)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases}\frac{25}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1\\ \frac{25.15}{16a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=25\\ \frac{15}{16}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=25\\ b^2=16\end{cases}.$$

Vậy $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\left(a^2=b^2+c^2; a,b,c>0\right)$.

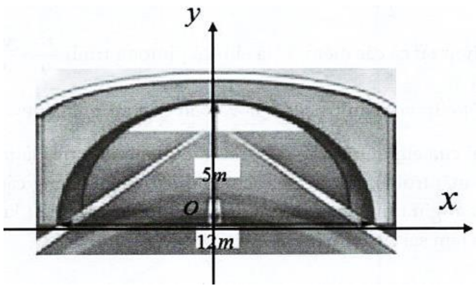
Câu 21. Một đường hầm có mặt cắt nửa hình elip cao $5m$, rộng $12m$. Viết phương trình chính tắc của elip đó?



Trả lời: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$

Lời giải

Vẽ hệ trục Oxy như hình vẽ:



Phương trình chính tắc của elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 (a>b>0)$

Elip có chiều cao $5m$ nên $b=5$.

Elip có chiều rộng $12m$ nên $2a=12 \Rightarrow a=6$.

Phương trình chính tắc của elip: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$.

Câu 22. Trên mặt phẳng, cho tam giác ABC có $A(-2;-2), B(-2;2), C(6;2)$.
Tìm tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn hệ thức $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|+|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}|=12$.

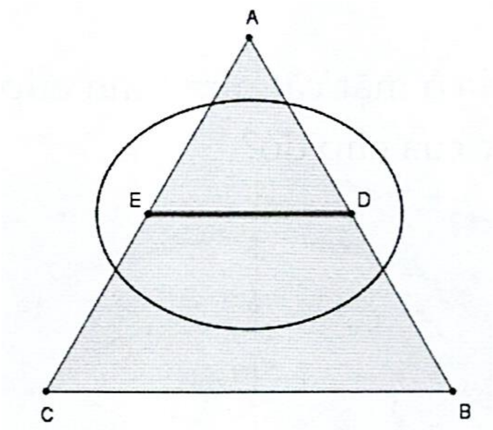
Trả lời: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

Lời giải

Gọi D, E lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC. Khi đó $D(-2;0)$, $E(2;0) \cdot DE=4$

Ta có $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|+|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}|=12 \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MD}|+|2\overrightarrow{ME}|=12$

$\Leftrightarrow 2MD+2ME=12 \Leftrightarrow MD+ME=6.$

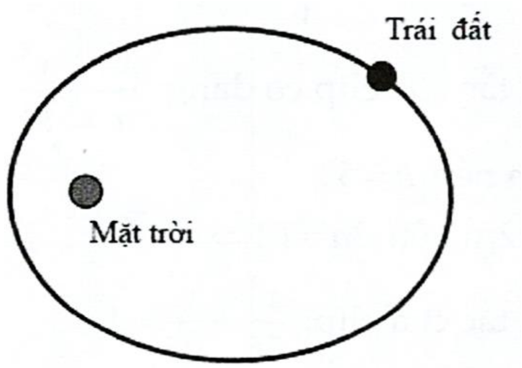


Vậy tập hợp các điểm M là elip có hai tiêu điểm là D và E, độ dài trục lớn là 6 .

(Elip này có $c=\frac{DE}{2}=2; a=3 \Rightarrow b=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$)

Vậy tập hợp tất cả các điểm M là elip có phương trình $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

Câu 23. Một elip với bán trục lớn a và bán tiêu cự c tỉ số $e=\frac{c}{a}$ được gọi là tâm sai của elip. Quỹ đạo của trái đất quanh mặt trời là một elip (E) trong đó mặt trời là một trong các tiêu điểm. Biết khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất giữa mặt trời và trái đất lần lượt là 147 triệu km, 152 triệu km. Tính tâm sai của elip (E)?



Trả lời: $e \approx 0,0167$

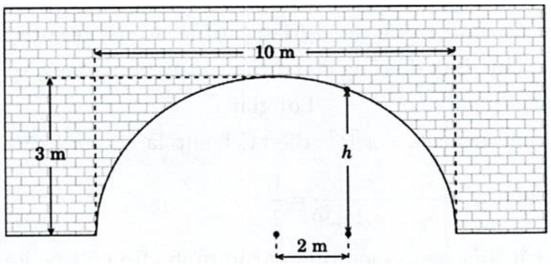
Lời giải

Một elip có phương trình: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b>0$, khoảng cách từ tiêu điểm đến một điểm bất kì M có hoành độ x_M là $d_M=a \pm \frac{c \cdot x_M}{a}$, cho nên khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ một tiêu điểm đến một điểm thuộc elip lần lượt là $a+c$ và $a-c$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+c=152 \\ a-c=147 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{299}{2} \\ c=\frac{5}{2} \end{cases}$

Vậy tâm sai của (E) là $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{299}\approx 0,0167$.

Câu 24. Mái vòm của một đường hầm có hình bán elip. Chiều rộng của đường hầm là $10m$, điểm cao nhất của mái vòm là $3m$. Gọi h là chiều cao của mái vòm tại điểm cách tâm của đường hầm $2m$. Tính h ?



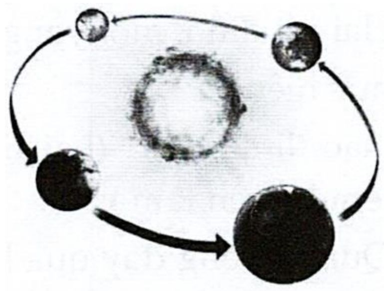
Trả lời: $h=\frac{3\sqrt{21}}{5}$

Lời giải

Phương trình của elip là $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$,

Khi đó: $\frac{2^2}{5^2}+\frac{h^2}{3^2}=1\Rightarrow h=\frac{3\sqrt{21}}{5}$

Câu 25. Các hành tinh và các sao chổi khi chuyển động xung quanh mặt trời có quỹ đạo là một đường elip trong đó tâm mặt trời là một tiêu điểm. Điểm gần mặt trời nhất gọi là điểm cận nhật, điểm xa mặt trời nhất gọi là điểm viễn nhật. Trái đất chuyển động xung quanh mặt trời theo quỹ đạo là một đường elip có độ dài nửa trục lớn bằng $93.000.000$ dặm. Tỉ số khoảng cách giữa điểm cận nhật và điểm viễn nhật đến mặt trời là $\frac{59}{61}$. Tính khoảng cách từ trái đất đến mặt trời khi trái đất ở điểm cận nhật. Lấy giá trị gần đúng.



Trả lời: $91.450.000$

Lời giải

Ta có $a=93.000.000$

Và $\frac{a-c}{a+c}=\frac{59}{61}\Leftrightarrow 61a-61c=59a+59c\Leftrightarrow c=\frac{a}{60}=\frac{93.000.000}{60}=1.550.000$.

Suy ra khoảng cách từ trái đất đến mặt trời khi trái đất ở điêm cận nhật là: $a-c=91.450.000$ dặm.

Câu 26. Ông Hoàng có một mảnh vườn hình elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là $60m$ và $30m$. Ông chia thành hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với elip để làm mục đích sử dụng khác nhau. Nửa bên trong đường tròn ông trông cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phân trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích elip được tính theo công thức $S=\pi ab$ trong đó a,b lần lượt là đọ dài nửa trục lớn và nửa trục bé của elip. Biết độ rộng của đường elip không đáng kể.

Trả lời: $T=\frac{S_T}{S_E}=\frac{1}{2}$

Lời giải

Diện tích hình tròn: $S_T=\pi.15^2$, diện tích elip là $S_E=\pi.15.30$.

Tỉ số diện tích: $T=\frac{S_T}{S_E}=\frac{\pi\cdot 15^2}{\pi\cdot 15\cdot 30}=\frac{1}{2}$

Câu 27. Cho $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và $d:y=x+k$. Với giá trị nào của k thì (d) có điểm chung với (E) ?

Trả lời: $-\sqrt{5}\le k\le\sqrt{5}$

Lời giải

Tọa độ giao điểm của (d) và (E): $\begin{cases} y=x+k \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{(x+k)^2}{1}=1 \Leftrightarrow 5x^2+8kx+4k^2-4=0$

(1).YCBT $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0 \Leftrightarrow -4k^2+20\ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5}\le k\le\sqrt{5}$.

Câu 28. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng chu vi của hình chữ nhật cơ sở bằng 20 và $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Trả lời: $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Lời giải

$(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a^2=b^2+c^2;a,b,c>0\right)\cdot\begin{cases} \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3} \\ 2(2a+2b)=20 \Rightarrow a^2=9,b^2=4. \\ c^2=a^2-b^2 \end{cases}$

$(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Câu 29. Cho elip $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm điểm M thuộc (E) sao cho góc $F_1MF_2=60^\circ$ với F_1,F_2 là hai tiêu điểm của (E)

Trả lời: $M_1\left(\frac{\sqrt{32}}{3};\frac{1}{3}\right), M_2\left(\frac{\sqrt{32}}{3};-\frac{1}{3}\right), M_3\left(-\frac{\sqrt{32}}{3};-\frac{1}{3}\right), M_4\left(-\frac{\sqrt{32}}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

$M\in(E)$. Ta có $MF_1=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x, MF_2=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

$F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1MF_2\cos 60^\circ \Leftrightarrow 12=4+\frac{9}{4}x^2 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{32}}{3}$.

Vì $M\in(E)$ nên $x=\pm\frac{\sqrt{32}}{3}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow M_1\left(\frac{\sqrt{32}}{3};\frac{1}{3}\right), M_2\left(\frac{\sqrt{32}}{3};-\frac{1}{3}\right), M_3\left(-\frac{\sqrt{32}}{3};-\frac{1}{3}\right), M_4\left(-\frac{\sqrt{32}}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Câu 30. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết một đỉnh và hai tiêu điểm của (E) tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) là $12(2+\sqrt{3})$.

Trả lời: $(E):\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$

Lời giải

$(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a^2=b^2+c^2;a,b,c>0\right)$. Gọi $F_1(-c;0)\Rightarrow F_2(c;0)$.

Hai đỉnh trên trục nhỏ $B_1(0;-b), B_2(0;b)$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} b=2c\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2(2a+2b)=12(2+\sqrt{3}) \\ c^2=a^2-b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=3\sqrt{3} \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow (E):\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$$

Câu 31. Cho Parabol $(P): y^2=16x$ và đường thẳng $(d): x=a(a>0)$. Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $AOB=120^\circ$.

Trả lời: $a=\frac{16}{3}$

Lời giải

Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $AOB=120^\circ$.

Ta có: $x=a\Rightarrow y^2=16a\Rightarrow y=\pm 4\sqrt{a}(a>0)\Rightarrow A(a;-4\sqrt{a}), B(a;4\sqrt{a})$.

$AOB=120^\circ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=120^\circ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OA},$

$\Leftrightarrow \frac{a^2-16a}{\sqrt{a^2+16a}\cdot\sqrt{a^2+16a}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{16}{3}.$

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của parabol (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$.

Trả lời: $\cdot y^2 = 20x$

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px (p > 0)$.

Vì (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$ nên $\frac{p}{2} = 5$, tức là $p = 10$.

Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $\cdot y^2 = 20x$.

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H) có một tiêu điểm là $F_2(6;0)$ và đi qua điểm $A_2(4;0)$.

Trả lời: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$

Lời giải

Giả sử hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0, b > 0$.

Do $A_2(4;0)$ thuộc (H) nên $\frac{4^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$, suy ra $a = 4$.

Mà $F_2(6;0)$ là tiêu điểm của (H) nên $c = 6$.

Suy ra $b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20$.

Vậy hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elíp biết độ dài trục bé là 6 và tiêu cự là 8 .

Trả lời: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Lời giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi phương trình chính tắc của Elíp là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b > 0)$

Do độ dài trục bé là 6 và tiêu cự là 8 nên $b = 3, c = 4 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = 5$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình chính tắc của Elíp là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip, biết tỉ số trục bé và trục lớn bằng $\frac{1}{\sqrt{5}}$ và biết elip đi qua điểm $M(\sqrt{15};-1)$.

Trả lời: $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$

Lời giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

Ta có: $\begin{cases}\frac{2b}{2a}=\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{15}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\sqrt{5}b\\ 15b^2+a^2=a^2b^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\sqrt{5}b\\ 5b^4-20b^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\sqrt{5}\\ b=2\end{cases}$.

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$.

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua hai điểm $M(0;3)$ và $N\left(3;-\frac{12}{5}\right)$.

Trả lời: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của elip (E) cần tìm là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$.

Vì (E) đi qua $M(0;3)$ và $N\left(3;-\frac{12}{5}\right)$ nên ta có hệ phương trình

$\begin{cases}\frac{0^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1\\ \frac{3^2}{a^2}+\frac{(-\frac{12}{5})^2}{b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2=9\\ a^2=25\end{cases}$ (thỏa mãn).

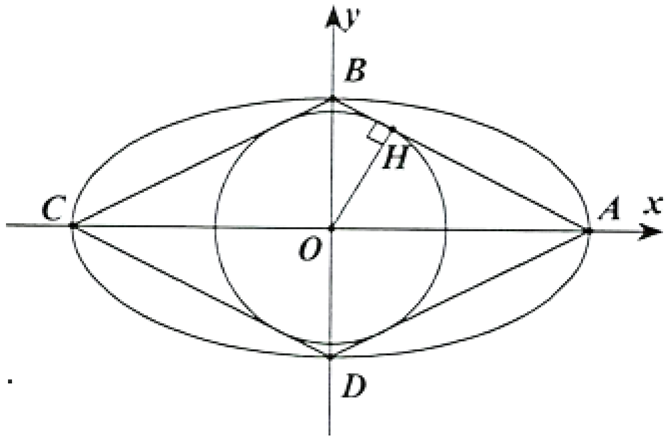
Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần tìm là $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $(C): x^2+y^2=4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A,B,C,D của hình thoi với điểm A nằm trên trục Ox.

Trả lời: $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

Lời giải

Giả sử phương trình elip (E) là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.



Đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$ có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R = 2$.

Vì (C) tiếp xúc với các cạnh của hình thoi và $A \in Ox$ nên $C \in Ox$ và $B, D \in Oy$.

Các điểm $A, B, C, D \in (E)$ nên A, B, C, D là các đỉnh của (E).

$A, B \in (E) \Rightarrow A(a;0), B(0;b) \Rightarrow OA = a, OB = b$.

Vì $OA = 2OB$ nên $a = 2b$.

Kẻ $OH \perp AB (H \in AB)$.

Ta có $OH = R = 2$.

Tam giác ABO vuông tại O có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow a^2 = 20 \Rightarrow b^2 = 5$.

Vậy phương trình (E) là $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta: x + y - 12 = 0$ bằng $2\sqrt{2}$.

Trả lời: $y^2 = 32x$ hoặc $y^2 = 64x$.

Lời giải

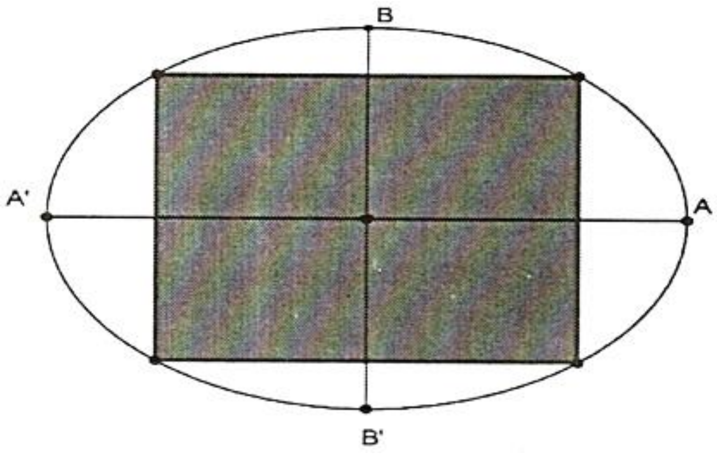
Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 2px (p > 0)$.

Tọa độ tiêu điểm của parabol (P) là $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.

Ta có $d(F,\Delta) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{p}{2} - 12\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{p}{2} - 12\right| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{p}{2} - 12 = 4 \\ \frac{p}{2} - 12 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = 32 \\ p = 16 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình của (P) là $y^2 = 32x$ hoặc $y^2 = 64x$.

Câu 39. Một mảnh đất hình Elip có độ dài trục lớn bằng $120m$, độ dài trục bé bằng $90m$. Tập đoàn VinGroup dự định xây dựng một trung tâm thương mại Vincom trong một hình chữ nhật nội tiếp của Eip như hình vẽ. Tính diện tích xây dựng Vincom lớn nhất.



Trả lời: $5400\left(m^2\right)$

Lời giải

Phương trình chính tắc của $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Ta có: $2a=120 \Rightarrow a=60, 2b=90 \Rightarrow b=45$.

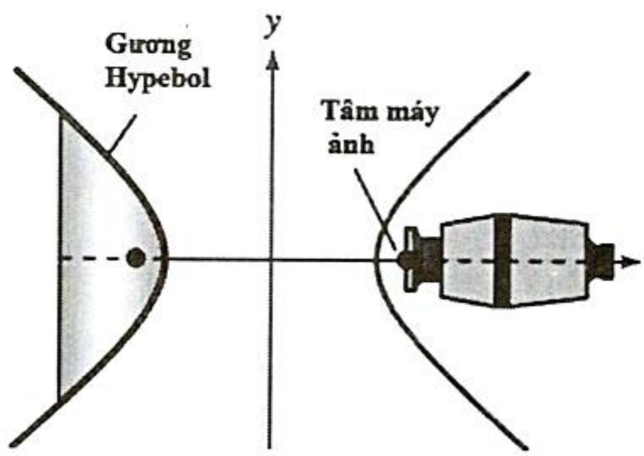
Suy ra $(E): \dfrac{x^2}{3600}+\dfrac{y^2}{2025}=1$.

Chọn $M\left(x_M; y_M\right)$ là đỉnh hình chữ nhật và $x_M>0, y_M>0$.

Ta có: $\dfrac{x_M^2}{3600}+\dfrac{y_M^2}{2025}=1$.

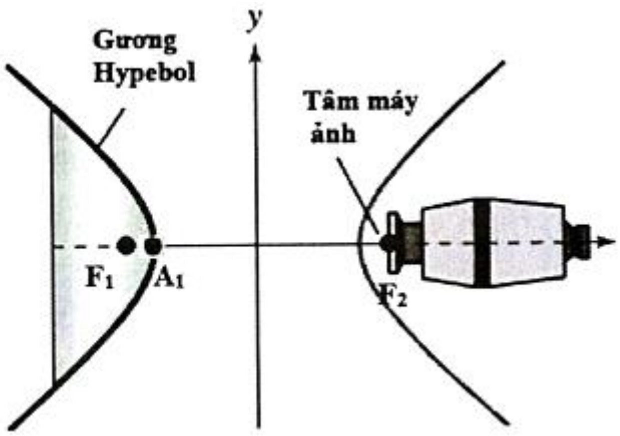
Diện tích hình chữ nhật là $S=4x_M \cdot y_M=5400 \cdot 2 \cdot \dfrac{x_M}{60} \cdot \dfrac{y_M}{45} \leq 5400\left(\dfrac{x_M^2}{3600}+\dfrac{y_M^2}{2025}\right)=5400\left(m^2\right)$.

Câu 40. Để chụp toàn cảnh, ta có thể sử dụng một gương hypebol. Máy ảnh được hướng về phía đỉnh của gương và tâm quang học của máy ảnh được đặt tại một tiêu điểm của gương (xem hình). Tìm khoảng cách từ quang tâm của máy ảnh đến đỉnh của gương, biết rằng phương trình cho mặt cắt của gương là $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$.



Trả lời: $5+\sqrt{39}$

Lời giải



Gọi $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{39}.$

Tiêu điểm của gương là $F_1(-\sqrt{39}; 0)$ và $F_2(\sqrt{39}; 0)$.

Đỉnh của gương là $A_1(-5; 0)$.

Vậy khoảng cách từ tâm của máy ảnh tới đỉnh của gương là $F_2A_1 = \sqrt{(-5 - \sqrt{39})^2} = 5 + \sqrt{39}$.