

CÂU HỎI

Câu 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có bảy chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3 .

Trả lời:

Câu 2. Một nhóm công nhân gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một tổ công tác sao cho phải có 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Trả lời:

Câu 3. Lớp 10 A có 38 học sinh. Trong buổi sinh hoạt lớp, giáo viên yêu cầu các học sinh bầu ra 3 bạn để làm cán bộ lớp gồm lớp trưởng, lớp phó học tập và lớp phó kỉ luật. Hỏi có bao nhiêu cách bầu cán bộ lớp?

Trả lời:

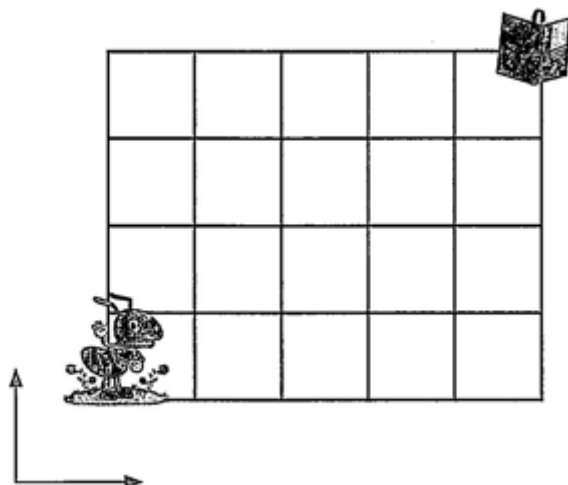
Câu 4. Từ các chữ số 0;1;2;3;4;5;6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau?

Trả lời:

Câu 5. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 2 mà mỗi số có ba chữ số khác nhau?

Trả lời:

Câu 6. Một chú kiến đứng tại góc dưới cùng của lưới 4×5 ô vuông như hình sau đây. Mỗi bước di chuyển chú kiến là một ô, và chú kiến chỉ có thể đi sang phải hoặc đi lên trên theo đường kẻ. Hỏi chú kiến có bao nhiêu cách đến vị trí cuốn sách?



Trả lời:

Câu 7. Lớp 10B có 15 bạn (trong đó có lớp trưởng) tham gia hoạt động trò chơi do Đoàn trường tổ chức. Trong trò chơi chạy tiếp sức, cô giáo phải xếp đội hình gồm 6 bạn và thứ tự chạy của họ. Hỏi cô giáo có bao nhiêu cách xếp đội hình để lớp trưởng là người chạy cuối.

Trả lời:

Câu 8. Cho 18 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu vector khác $\vec{0}$ sao cho điểm đầu và điểm cuối của mỗi vector đó là 2 trong 18 điểm đã cho?

Trả lời:

Câu 9. Bạn Phú chọn mật khẩu cho tài khoản Microsoft Teams của mình gồm 8 kí tự đôi một khác nhau, trong đó 2 kí tự đầu tiên là hai chữ cái in thường, 2 kí tự tiếp theo là hai chữ cái in hoa (các chữ cái chọn từ bảng chữ cái Tiếng Anh gồm 26 chữ cái), 3 kí tự tiếp theo là các chữ số và kí tự cuối cùng là một trong các kí tự đặc biệt: @, #, . Hỏi bạn Phú có bao nhiêu cách tạo ra một mật khẩu?

Trả lời:

Câu 10. Cho hai dãy ghế được xếp như sau:

Dãy 1	Ghế 1	Ghế 2	Ghế 3	Ghế 4
Dãy 2	Ghế 1	Ghế 2	Ghế 3	Ghế 4

Một đội chơi có 15 người gồm 7 nam và 8 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 bạn ngồi vào hai dãy ghế để tham gia trả lời câu hỏi. Hai người được gọi là ngồi đối diện nhau nếu ngồi ở hai dãy và có cùng số ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ?

Trả lời:

Câu 11. Từ n điểm phân biệt, ta lập được 153 đoạn thẳng có hai đầu mút là 2 trong n điểm đã cho. Tìm n .

Trả lời:

Câu 12. Tính số đường chéo của một đa giác lồi có 14 đỉnh.

Trả lời:

Câu 13. Cho đa giác lồi có n cạnh ($n \geq 4$). Tìm n để đa giác đó có số đường chéo bằng số cạnh?

Trả lời:

Câu 14. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2 .

Trả lời:

Câu 15. Có 3 cuốn sách Lý, 4 cuốn sách Sinh, 5 cuốn sách Địa. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các cuốn sách trên vào giá sách hàng ngang nếu các cuốn sách cùng môn học đứng cạnh nhau?

Trả lời:

Câu 16. Cho 10 điểm trong mặt phẳng và không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác có đỉnh được lấy từ các điểm đó?

Trả lời:

Câu 17. Cho các số: 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau bắt đầu từ chữ số 2.

Trả lời:

Câu 18. Tính số các số tự nhiên đôi một khác nhau có 6 chữ số tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 sao cho hai chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau.

Trả lời:

Câu 19. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 15 chữ số, trong đó các chữ số 1 và 2 mỗi chữ số xuất hiện năm lần, các chữ số còn lại xuất hiện không quá một lần và các chữ số lớn hơn 2 không có bất kì hai chữ số nào đứng cạnh nhau.

Trả lời:

Câu 20. Rút gọn:
$$A = \frac{7! \cdot 4!}{10!} \left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{6!}{2!4!} \right)$$

Trả lời:

Câu 21. Một nhóm học sinh gồm 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng ngang. Tính số cách sắp xếp để cho học sinh nam và học sinh nữ xen kẽ nhau.

Trả lời:

Câu 22. Nam xếp 5 quyển sách Toán khác nhau, 4 quyển sách Hóa khác nhau và 3 quyển sách Lí khác nhau lên một giá sách theo từng môn học. Hỏi Nam có bao nhiêu cách sắp xếp?

Trả lời:

Câu 23. Có bao nhiêu cách phân chia 8 học sinh vào hai nhóm: một nhóm 5 học sinh, nhóm kia có 3 học sinh?

Trả lời:

Câu 24. Lớp 10 của một trường THPT có 40 học sinh. Thầy giáo chủ nhiệm cần chọn 2 bạn vào Đội Cờ đỏ và 3 bạn vào Ban chấp hành Chi Đoàn sao cho không có bạn nào kiêm cả hai nhiệm vụ. Hỏi thầy giáo chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn?

Trả lời:

Câu 25. Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 viên bi đỏ có bán kính khác nhau và 3 viên bi xanh bán kính bán kính giống nhau vào một dãy có 8 ô trống?

Trả lời:

Câu 26. Ban văn nghệ lớp 10A có 7 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Cần chọn ra 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ để ghép thành 5 cặp nam nữ diễn tiết mục thời trang. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thỏa mãn yêu cầu trên?

Trả lời:

Câu 27. Một đa giác đều có 44 đường chéo, hỏi số cạnh của đa giác đó bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 28. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 2800 tam giác mà đỉnh của chúng là các điểm nói trên. Tìm n .

Trả lời:

Câu 29. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

Trả lời:

Câu 30. Cho sáu chữ số 4,5,6,7,8,9. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có ba chữ số khác nhau lập thành từ sáu chữ số đã cho.

Trả lời:

Câu 31. Có bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số, sao cho mỗi số đó, chữ số đứng sau lớn hơn chữ số chữ số đứng trước?

Trả lời:

Câu 32. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số được chọn từ 1,2, 3,4, 5 sao cho chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có mặt đúng ba lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần?

Trả lời:

Câu 33. Tìm tất cả nghiệm thực của phương trình $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$.

Trả lời:

Câu 34. Giải bất phương trình $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 - 20 < 0$.

Trả lời:

Câu 35. Giải phương trình $P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$.

Trả lời:

Câu 36. Từ tập $X = \{2;3;4;5;6\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau?

Trả lời:

Câu 37. Từ các số 0,1,2,7,8,9 tạo được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

Trả lời:

Câu 38. Từ các số 0,1,2,7,8,9 tạo được bao nhiêu số lẻ có 5 chữ số khác nhau?

Trả lời:

Câu 39. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó chứa các chữ số 3,4,5 và chữ số 4 đứng cạnh chữ số 3 và chữ số 5 ?

Trả lời:

Câu 40. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số dạng $\overline{abc}$ với $a,b,c \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$ sao cho $a < b < c$.

Trả lời:

Câu 41. Các số tự nhiên có 7 chữ số từ các chữ số 1;2;3;4. Tính xác suất để số lập được thỏa mãn: các chữ số 1;2;3 có mặt hai lần, chữ số 4 có mặt 1 lần đồng thời các chữ số lẻ đều nằm ở các vị trí lẻ (tính từ trái qua phải).

Trả lời:

Câu 42. Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm tám chữ số sao cho trong mỗi số đó có đúng ba chữ số 1 , các chữ số còn lại đôi một khác nhau và hai chữ số chẵn không đứng cạnh nhau?

Trả lời:

Câu 43. Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số trong đó có ba chữ số 0, không có hai chữ số 0 nào đứng cạnh nhau và các chữ số khác chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần.

Trả lời:

Câu 44. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số mà tổng các chữ số trong mỗi số là 3 .

Trả lời:

Câu 45. Ngân hàng đề thi gồm 15 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 8 câu hỏi tự luận khác nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi sao cho mỗi đề thi gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 4 câu hỏi tự luận khác nhau.

Trả lời:

Câu 46. Từ các chữ số 2,3,4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt 2 lần, chữ số 3 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 4 lần?

Trả lời:

Câu 47. Có bao nhiêu cách chia một nhóm 6 người thành 4 nhóm nhỏ, trong đó có hai nhóm 2 người và hai nhóm 1 người?

Trả lời:

Câu 48. Đội thanh niên xung kích có của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong ba lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Trả lời:

Câu 49. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ.

Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

Trả lời:

Câu 50. Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

Trả lời:

Câu 51. Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 nữ sinh, 3 nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ:

Trả lời:

Câu 52. Có bao nhiêu cách chia hết 4 đồ vật khác nhau cho 3 người, biết rằng mỗi người nhận được ít nhất 1 đồ vật.

Trả lời:

Câu 53. Ông và Bà An cùng có 6 đứa con đang lên máy bay theo một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp hàng khác nhau nếu ông An hay bà An đứng ở đầu hoặc cuối hàng:

Trả lời:

Câu 54. Trong một giải cờ vua gồm nam và nữ vận động viên. Mỗi vận động viên phải chơi hai ván với mỗi động viên còn lại. Cho biết có 2 vận động viên nữ và cho biết số ván các vận động viên chơi nam chơi với nhau hơn số ván họ chơi với hai vận động viên nữ là 84. Hỏi số ván tất cả các vận động viên đã chơi?

Trả lời:

Câu 55. Cho đa giác đều có n cạnh ($n \geq 4$). Tìm n để đa giác có số đường chéo bằng số cạnh ?

Trả lời:

Câu 56. Trên mặt phẳng có 2017 đường thẳng song song với nhau và 2018 đường thẳng song song khác cùng cắt nhóm 2017 đường thẳng đó. Số hình bình hành nhiều nhất có thể được tạo thành có đỉnh là các giao điểm nói trên bằng

Trả lời:

Câu 57. Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in N$ và $n \geq 3$. Tìm $\begin{cases} n \in N \\ n \geq 2 \end{cases}$ biết rằng đa giác đã cho có

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)n}{2} > \frac{10}{3} n \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow 2 \leq n \leq 5 \text{ đường chéo.}$$

Trả lời:

Câu 58. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên đường thẳng d_1 lấy 10 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 25 vừa nói trên.

Trả lời:

Câu 59. Nếu $A_x^2 = 110$ tìm x ?

Trả lời:

Câu 60. Cho $C_n^{n-3} = 1140$. Tính $A = \frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$.

Trả lời:

Câu 61. Nghiệm của phương trình $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$ là:

Trả lời:

Câu 62. Cho số tự nhiên n thỏa mãn $3C_{n+1}^3 - 3A_n^2 = 52(n-1)$. Tìm n

Trả lời:

Câu 63. Cho các số tự nhiên m, n thỏa mãn đồng thời các điều kiện $C_m^2 = 153$ và $C_m^n = C_m^{n+2}$. Khi đó $m+n$ bằng:

Trả lời:

Câu 64. Tính giá trị $M = A_{n-15}^2 + 3A_{n-14}^3$, biết rằng $C_n^4 = 20C_n^2$ (với n là số nguyên dương, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử và C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Trả lời:

Câu 65. Tổng của tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{1}{C_n^1} - \frac{1}{C_{n+1}^2} = \frac{7}{6C_{n+4}^1}$ là:

Trả lời:

Câu 66. Tìm số nguyên dương n sao cho: $P_{n-1} \cdot A_{n+4}^4 < 15P_{n+2}$.

Trả lời:

Câu 67. Giải bất phương trình (ẩn n thuộc tập số tự nhiên) $C_{n+2}^{n-1} + C_{n+2}^n > \frac{5}{2}A_n^2$.

Trả lời:

Câu 68. Giải bất phương trình (ẩn n thuộc tập số tự nhiên) $(n!)^3 C_n^n \cdot C_{2n}^n \cdot C_{3n}^n \leq 720$.

Trả lời:

Câu 69. Giải bất phương trình (ẩn n thuộc tập số tự nhiên) $A_{n+1}^3 + C_{n+1}^{n-1} < 14(n+1)$.

Trả lời:

Câu 70. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 1725 tam giác có các đỉnh là ba trong số các điểm thuộc d_1 và d_2 nói trên. Tìm tổng các chữ số của n .

Trả lời:

Câu 71. Trong không gian cho $2n$ điểm phân biệt ($n > 4, n \in N$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và trong $2n$ điểm đó có đúng n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng và không có 4 điểm nào ngoài 4 điểm trong n điểm này đồng phẳng. Tìm n sao cho từ $2n$ điểm đã cho tạo ra đúng 201 mặt phẳng phân biệt.

Trả lời:

Câu 72. Cho x, y là nghiệm của hệ phương trình, $\begin{cases} A_y^x = 90 - 3C_y^x \\ 3A_y^x = 80 + 10C_y^x \end{cases}$. Tìm x và y ?

Trả lời:

Câu 73. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 lấy 15 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 10 điểm phân biệt. Tính số tam giác mà có các đỉnh được chọn từ 25 điểm này.

Trả lời:

Câu 74. Từ các số 0,1,2,3,4,5,6,7,8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số sao cho luôn có mặt 3 số 0,1,2 và ba số này đứng cạnh nhau?

Trả lời:

LỜI GIẢI

Câu 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có bảy chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3 .

Trả lời: 7440

Lời giải

Vì chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3 nên số cần lập có bộ ba số 123 hoặc 321,

TH1: Số cần lập có bộ ba số 123 .

Nếu bộ ba số 123 đứng đầu thì số có dạng $\overline{123abcd}$.

Có $A_7^4 = 840$ cách chọn bốn số a, b, c, d nên có $A_7^4 = 840$ số,

Nếu bộ ba số 123 không đứng đầu thì số có 4 vị trí đặt bộ ba số 123 ,

Có 6 cách chọn số đứng đầu và có $A_6^3 = 120$ cách chọn ba số b, c, d ,

Theo quy tắc nhân có $6 \cdot 4 \cdot A_6^3 = 2880$ số.

Theo quy tắc cộng có $840 + 2880 = 3720$ số.

TH2: Số cần lập có bộ ba số 321 .

Do vai trò của bộ ba số 123 và 321 như nhau nên có $2(840 + 2880) = 7440$.

Câu 2. Một nhóm công nhân gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một tổ công tác sao cho phải có 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Trả lời: 111300

Lời giải

- Chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

- Chọn 3 tổ viên, trong đó có nữ.

+ Chọn 1 nữ và 2 nam có $5 \cdot C_{13}^2$ cách,

+ Chọn 2 nữ và 1 nam có $13 \cdot C_5^2$ cách,

+ Chọn 3 nữ có C_5^3 cách.

Vậy có $A_{15}^2 (5 \cdot C_{13}^2 + 13 \cdot C_5^2 + C_5^3) = 111300$ cách.

Câu 3. Lớp 10A có 38 học sinh. Trong buổi sinh hoạt lớp, giáo viên yêu cầu các học sinh bầu ra 3 bạn để làm cán bộ lớp gồm lớp trưởng, lớp phó học tập và lớp phó kỉ luật. Hỏi có bao nhiêu cách bầu cán bộ lớp?

Trả lời: 50616

Lời giải

Mỗi cách chọn ba bạn để bầu làm cán bộ lớp (có sự phân chia lớp trưởng, lớp phó học tập và lớp phó kỉ luật) là một chỉnh hợp chập 3 của 38 phần tử. Vậy số cách để bầu cán bộ lớp là:

$$A_{38}^3 = 50616 \text{ (cách).}$$

Câu 4. Từ các chữ số 0;1;2;3;4;5;6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau?

Trả lời: 180

Lời giải

Số cách chọn ra chữ số hàng trăm là 6 cách. Với chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị, mỗi cách chọn ra 2 số chính là một chỉnh hợp chập 2 của 6 phần tử. Vậy số các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau lập được là: $6 \cdot A_6^2 = 180$ (cách).

Câu 5. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 2 mà mỗi số có ba chữ số khác nhau?

Trả lời: 320

Lời giải

Gọi số có ba chữ số cần tìm là $\overline{abc} (a \neq 0)$.

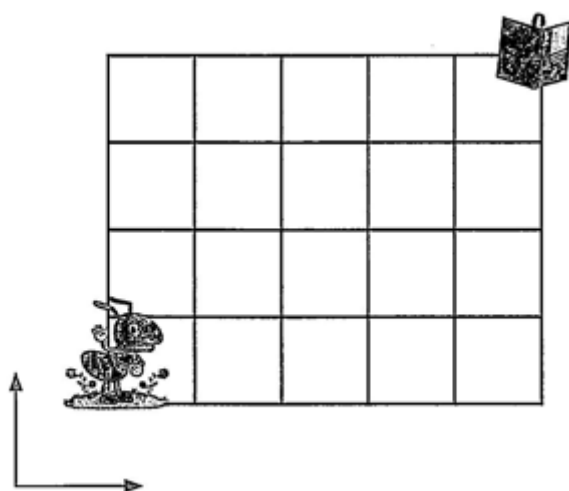
Vì số cần tìm chia hết cho 2 nên số cách chọn chữ số c là 5 cách.

Số cách chọn chữ số a là C_8^1 (cách).

Số cách chọn chữ số b là C_8^1 (cách).

Vậy số các số chia hết cho 2 mà mỗi số có ba chữ số khác nhau là: $5 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1 = 5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$ (số)

Câu 6. Một chú kiến đứng tại góc dưới cùng của lưới 4×5 ô vuông như hình sau đây. Mỗi bước di chuyển chú kiến là một ô, và chú kiến chỉ có thể đi sang phải hoặc đi lên trên theo đường kẻ. Hỏi chú kiến có bao nhiêu cách đến vị trí cuốn sách?



Trả lời: 126

Lời giải

Để đi đến vị trí cuốn sách, chú kiến cần bước 9 bước gồm 4 bước đi lên và 5 bước đi sang phải. Số cách chọn 4 bước đi lên và 5 bước đi sang phải chính là số cách chọn 4 bước đi lên trong dãy 9 bước cần di chuyển. Do đó, số cách chú kiến có thể chọn để đi đến vị trí cuốn sách là: $C_9^4 = 126$ (cách).

Câu 7. Lớp 10B có 15 bạn (trong đó có lớp trưởng) tham gia hoạt động trò chơi do Đoàn trường tổ chức. Trong trò chơi chạy tiếp sức, cô giáo phải xếp đội hình gồm 6 bạn và thứ tự chạy của họ. Hỏi cô giáo có bao nhiêu cách xếp đội hình để lớp trưởng là người chạy cuối.

Trả lời: 240240

Lời giải

Lớp trưởng là người chạy cuối: có 1 cách xếp.

Mỗi cách xếp đội hình 5 bạn còn lại trong 14 bạn là một chỉnh hợp chập 5 của 14 phần tử nên số cách xếp đội hình theo yêu cầu là: $A_{14}^5 \cdot 1 = 240240$.

Câu 8. Cho 18 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu vector khác $\vec{0}$ sao cho điểm đầu và điểm cuối của mỗi vector đó là 2 trong 18 điểm đã cho?

Trả lời: 306

Lời giải

Mỗi cách chọn một vector là một cách chọn 2 điểm trong 18 điểm đã cho rồi xếp thứ tự điểm đầu và điểm cuối, tức là một chỉnh hợp chập 2 của 18 phần tử. Vậy số vector thỏa mãn đề bài là:

$$A_{18}^2 = 306.$$

Câu 9. Bạn Phú chọn mật khẩu cho tài khoản Microsoft Teams của mình gồm 8 kí tự đôi một khác nhau, trong đó 2 kí tự đầu tiên là hai chữ cái in thường, 2 kí tự tiếp theo là hai chữ cái in hoa (các chữ cái chọn từ bảng chữ cái Tiếng Anh gồm 26 chữ cái), 3 kí tự tiếp theo là các chữ số và kí tự cuối cùng là một trong các kí tự đặc biệt: @, #, .. Hỏi bạn Phú có bao nhiêu cách tạo ra một mật khẩu?

Trả lời: 912600000

Lời giải

Có 26 chữ cái và 10 chữ số. Chọn 2 kí tự đầu tiên là chữ cái in thường nên ta có A_{26}^2 cách chọn.

Chọn 2 kí tự tiếp theo là chữ cái in hoa nên ta có A_{26}^2 cách chọn.

Chọn 3 kí tự tiếp theo là chữ số trong 10 chữ số nên có A_{10}^3 cách chọn.

Chọn 1 kí tự cuối cùng có 3 cách.

Vậy ta có $3(A_{26}^2)^2 A_{10}^3 = 912600000$ cách để bạn Phú tạo ra một mật khẩu.

Câu 10. Cho hai dãy ghế được xếp như sau:

Dãy 1	Ghế 1	Ghế 2	Ghế 3	Ghế 4
Dãy 2	Ghế 1	Ghế 2	Ghế 3	Ghế 4

Một đội chơi có 15 người gồm 7 nam và 8 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 bạn ngồi vào hai dãy ghế để tham gia trả lời câu hỏi. Hai người được gọi là ngồi đối diện nhau nếu ngồi ở hai dãy và có cùng số ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ?

Trả lời: 541900800

Lời giải

Vì mỗi bạn nam ngồi đối diện một bạn nữ nên có 4 bạn nam và 4 bạn nữ được chọn ngồi vào hai dãy ghế.

Chọn 1 bạn nam thứ nhất xếp vào chỗ bất kì trong 8 chỗ có $7 \cdot 8 = 56$ cách.

Chọn 1 bạn nam thứ hai xếp vào chỗ bất kì trong 7 chỗ còn lại và không đối diện với bạn nam thứ nhất có $6 \cdot 6 = 36$ cách.

Chọn 1 bạn nam thứ ba xếp vào chỗ bất kì trong 6 chỗ còn lại và không đối diện với bạn nam thứ nhất, thứ hai có $5 \cdot 4 = 20$ cách.

Chọn 1 bạn nam thứ tư xếp vào chỗ bất kì trong 5 chỗ còn lại và không đối diện với bạn nam thứ nhất, thứ hai, thứ ba có $4 \cdot 2 = 8$ cách.

Chọn 4 bạn nữ và xếp vào 4 ghế còn lại có A_4^4 cách.

Vậy có $56 \cdot 36 \cdot 20 \cdot 8 \cdot A_4^4 = 541900800$ cách xếp để mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ.

Câu 11. Từ n điểm phân biệt, ta lập được 153 đoạn thẳng có hai đầu mút là 2 trong n điểm đã cho. Tìm n .

Trả lời: 18

Lời giải

Số đoạn thẳng lập được từ n điểm đã cho là C_n^2 .

$$\text{Theo đề bài, ta có: } C_n^2 = 153 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 153 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 153 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 153$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 306 = 0. \text{ Suy ra } n = 18.$$

Câu 12. Tính số đường chéo của một đa giác lồi có 14 đỉnh.

Trả lời: 77

Lời giải

Tổng số đoạn thẳng lập được từ $n(n > 3)$ đỉnh là C_n^2 . Trong số các đoạn thẳng đó thì có n cạnh của đa giác, còn lại là đường chéo.

$$\text{Vậy số đường chéo của đa giác } n \text{ đỉnh là: } C_n^2 - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n(n-3)}{2}. \text{ Với } n=14 \text{ ta có số}$$
$$\text{đường chéo của đa giác lồi 14 đỉnh là: } \frac{14(14-3)}{2} = 77.$$

Câu 13. Cho đa giác lồi có n cạnh ($n \geq 4$). Tìm n để đa giác đó có số đường chéo bằng số cạnh?

Trả lời: 5

Lời giải

Áp dụng công thức bài 28 và theo đề bài ta có: $\frac{n(n-3)}{2} = n \Leftrightarrow n^2 - 5n = 0$. Suy ra $n = 5$. Vậy đa giác cần tìm có 5 cạnh.

Câu 14. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2 .

Trả lời: 5950

Lời giải

Trường hợp 1: 1 điểm thuộc d_1 và 2 điểm thuộc d_2 .

Số tam giác lập được là: $C_{17}^1 \cdot C_{20}^2 = 3230$.

Trường hợp 2: 2 điểm thuộc d_1 và 1 điểm thuộc d_2 .

Số tam giác lập được là: $C_{17}^2 \cdot C_{20}^1 = 2720$.

Vậy có $3230 + 2720 = 5950$ tam giác thỏa mãn đề bài.

Câu 15. Có 3 cuốn sách Lý, 4 cuốn sách Sinh, 5 cuốn sách Địa. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các cuốn sách trên vào giá sách hàng ngang nếu các cuốn sách cùng môn học đứng cạnh nhau?

Trả lời: 103680

Lời giải

Gọi L là nhóm 3 sách lý, S là nhóm 4 sách sinh, $Đ$ là nhóm 5 sách địa. Số cách xếp trong L là $3!$; số cách xếp trong S là $4!$; số cách xếp trong $Đ$ là $5!$; số cách xếp $L, S, Đ$ với nhau: $3!$.

Vậy số cách xếp thỏa mãn đề bài là: $3!4!5!3! = 103680$ (cách).

Câu 16. Cho 10 điểm trong mặt phẳng và không có 3 điểm nào thẳng hàng.

Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác có đỉnh được lấy từ các điểm đó?

Trả lời: 120

Lời giải

Số tam giác lập được cũng bằng với số cách chọn ra 3 điểm phân biệt từ 10 điểm đã cho, ta có: $C_{10}^3 = 120$ (tam giác).

Câu 17. Cho các số: 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau bắt đầu từ chữ số 2.

Trả lời: 24

Lời giải:

Gọi số tự nhiên cần lập có dạng $\overline{abcde}$.

Chọn $a = 2$: có 1 cách. Chọn $b (b \neq a)$: có 4 cách.

Chọn $c (c \neq a, c \neq b)$: có 3 cách. Chọn $d (d \neq a, d \neq b, d \neq c)$: có 2 cách.

Chọn e : có 1 cách.

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn là: $1.4.3.2.1 = 24$.

Câu 18. Tính số các số tự nhiên đôi một khác nhau có 6 chữ số tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 sao cho hai chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau.

Trả lời: 192

Lời giải:

Xét số có hình thức $\overline{0bcdef}$.

Số cách hoán đổi vị trí hai chữ số 3,4 (cùng nhóm X) là 2.

Số cách hoán đổi vị trí của X với các chữ số 1,2,5 là: 4!

Vậy số các số được lập theo hình thức này là $2 \cdot 4! = 48$.

Xét số có hình thức $\overline{abcdef}$ trong đó a được phép bằng 0.

Số cách hoán đổi vị trí của hai chữ số 3,4 (cùng nhóm X) là 2.

Số cách hoán đổi vị trí của X với các chữ số 0,1,2,5 là: 5!.

Số các số được lập theo hình thức này là $2 \cdot 5! = 240$.

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn đề bài là $240 - 48 = 192$.

Câu 19. Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 15 chữ số, trong đó các chữ số 1 và 2 mỗi chữ số xuất hiện năm lần, các chữ số còn lại xuất hiện không quá một lần và các chữ số lớn hơn 2 không có bất kì hai chữ số nào đứng cạnh nhau.

Trả lời: 293388480

Lời giải:

Trước hết ta sắp xếp năm chữ số 1 và năm chữ số 2 vào 10 vị trí hàng ngang:

- Chọn năm trong mười vị trí để sắp xếp chữ số 1 : có C_{10}^5 cách chọn.

- Các vị trí còn lại ta sắp xếp chữ số 2 : có 1 cách chọn.

Từ dãy các chữ số 1 và 2 ở trên có chín vị trí xen giữa và hai vị trí hai đầu mút. Các số còn lại gồm 3,4,5,6,7,8,9 đều lớn hơn 2. Ta cần chọn ra năm trong bảy chữ số trên để sắp xếp vào mười một vị trí cho phép:

- Số cách chọn ra năm trong bảy chữ số: C_7^5 .

- Số cách chọn ra năm trong mười một vị trí để sắp xếp năm chữ số vừa chọn là A_{11}^5 .

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn là $C_{10}^5 \cdot 1 \cdot C_7^5 \cdot A_{11}^5 = 293388480$.

Câu 20. Rút gọn: $A = \frac{7! \cdot 4!}{10!} \left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{6!}{2!4!} \right)$

Trả lời: $\frac{41}{30}$

Lời giải

$$A = \frac{7! \cdot 4!}{10!} \left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{6!}{2!4!} \right) = \frac{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \left(\frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5!} - \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 4!} \right) = \frac{1}{30} (56 - 15) = \frac{41}{30}.$$

Câu 21. Một nhóm học sinh gồm 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng ngang. Tính số cách sắp xếp để cho học sinh nam và học sinh nữ xen kẽ nhau.

Trả lời: 28800

Lời giải:

Ta xếp 5 nam sinh trước tiên, số cách xếp là $5!$.

Giữa các nam sinh và hai đầu, cuối hàng sẽ có 6 vị trí (đánh số từ 1 đến 6) để có thể sắp xếp 5 nữ sinh vào sao cho nam, nữ xen kẽ.

Trường hợp 1: 5 nữ sinh xếp vào vị trí từ số 1 đến số 5, số cách xếp là $5!$.

Trường hợp 2: 5 nữ sinh xếp vào vị trí từ số 2 đến số 6, số cách xếp là $5!$.

Vậy số cách xếp hàng thỏa mãn đề bài là $5!(5! + 5!) = 28800$.

Câu 22. Nam xếp 5 quyển sách Toán khác nhau, 4 quyển sách Hóa khác nhau và 3 quyển sách Lí khác nhau lên một giá sách theo từng môn học. Hỏi Nam có bao nhiêu cách sắp xếp?

Trả lời: $3!.5!.4!.3!$

Lời giải:

Có 3 môn học nên có $3!$ cách sắp xếp sách theo môn.

Ứng với mỗi cách sắp xếp theo môn có $5!$ cách xếp sách Toán, $4!$ cách xếp sách hóa và $3!$ cách xếp sách Lí.

Vậy số cách xếp sách là : $3!.5!.4!.3!$

Câu 23. Có bao nhiêu cách phân chia 8 học sinh vào hai nhóm: một nhóm 5 học sinh, nhóm kia có 3 học sinh?

Trả lời: 56

Lời giải:

Chọn 5 học sinh thành một nhóm, số cách chọn là C_8^5 .

Số học sinh còn lại (3 học sinh) phải vào nhóm còn lại nên có 1 cách chọn.

Vậy sẽ có tất cả $C_8^5 \cdot 1 = 56$ cách chọn thỏa mãn.

Câu 24. Lớp 10 của một trường THPT có 40 học sinh. Thầy giáo chủ nhiệm cần chọn 2 bạn vào Đội Cờ đỏ và 3 bạn vào Ban chấp hành Chi Đoàn sao cho không có bạn nào kiêm cả hai nhiệm vụ. Hỏi thầy giáo chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn?

Trả lời: 6580080

Lời giải:

Chọn 2 bạn trong số 40 bạn vào Đội Cờ đỏ: có C_{40}^2 cách.

Chọn 3 trong số 38 bạn còn lại vào Ban chấp hành Chi đoàn: có C_{38}^3 cách. Theo quy tắc nhân, có $C_{40}^2 C_{38}^3 = 6580080$ cách chọn thỏa mãn.

Câu 25. Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 viên bi đỏ có bán kính khác nhau và 3 viên bi xanh bán kính bán kính giống nhau vào một dãy có 8 ô trống?

Trả lời: 6720

Lời giải:

Do 4 bi đỏ có bán kính khác nhau nên ta quan tâm đến thứ tự sắp xếp của chúng. Xếp 4 bi đỏ vào 8 ô trống sẽ có A_8^4 cách.

Sau khi xếp bi đỏ rồi, còn lại : $8 - 4 = 4$ ô trống.

Do 3 bi xanh giống nhau nên ta bỏ qua thứ tự sắp xếp giữa chúng. Đặt 3 bi xanh vào 3 trong 4 ô trống còn lại, ta có C_4^3 cách.

Vậy số cách sắp xếp thỏa mãn là: $A_8^4 \cdot C_4^3 = 6720$ (cách).

Câu 26. Ban văn nghệ lớp 10A có 7 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Cần chọn ra 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ để ghép thành 5 cặp nam nữ diễn tiết mục thời trang. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thỏa mãn yêu cầu trên?

Trả lời: 317520

Lời giải:

Chọn 5 nam sinh từ 7 nam sinh: có C_7^5 cách.

Chọn 5 nữ sinh từ 9 nữ sinh: có C_9^5 cách.

Khi ghép những học sinh được chọn, ta cần làm hai việc liên tiếp:

- Cố định một vị trí bất kỳ cho 5 nam sinh: có 1 cách.

- Sắp xếp 5 nữ sinh vào 5 vị trí nam sinh được cố định trước đó: có $5!$ cách. Vậy có $C_7^5 \cdot C_9^5 \cdot 1 \cdot 5! = 317520$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27. Một đa giác đều có 44 đường chéo, hỏi số cạnh của đa giác đó bằng bao nhiêu?

Trả lời: 11

Lời giải:

Hai đỉnh của đa giác n đỉnh ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) tạo thành một đoạn thẳng (bao gồm cả cạnh và đường chéo của đa giác đó).

Vậy số đường chéo đa giác là: $C_n^2 - n = 44 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} - n = 44$

$\Leftrightarrow n(n-1) - 2n = 88 \Leftrightarrow \begin{cases} n=11 \\ n=-8 \end{cases} \Leftrightarrow n=11$ (vì $n \in \mathbb{N}$).

Câu 28. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 2800 tam giác mà đỉnh của chúng là các điểm nói trên. Tìm n .

Trả lời: 20

Lời giải:

Nhận xét: Một tam giác được tạo thành cần 2 điểm thuộc d_1 ; 1 điểm thuộc d_2 và ngược lại. Vì vậy số tam giác có được là: $C_{10}^2 C_n^1 + C_{10}^1 C_n^2$.

Ta có: $C_{10}^2 C_n^1 + C_{10}^1 C_n^2 = 2800 \Leftrightarrow 45n + 5n(n-1) - 2800 = 0 \Leftrightarrow n = 20$.

Câu 29. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

Trả lời: 207900

Lời giải:

Ta có $C_3^1 \cdot C_{12}^4$ cách phân công các thanh niên về tỉnh thứ nhất.

Với mỗi cách này thì có $C_2^1 \cdot C_8^4$ cách phân công số thanh niên còn lại về tỉnh thứ hai. Với mỗi cách phân công trên thì có $C_1^1 \cdot C_4^4$ cách phân công số thanh niên còn lại về tỉnh thứ 3.

Do đó ta có: $C_3^1 C_{12}^4 C_2^1 C_8^4 C_1^1 C_4^4 = 207900$ cách phân công thỏa mãn đề bài.

Câu 30. Cho sáu chữ số 4, 5, 6, 7, 8, 9. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có ba chữ số khác nhau lập thành từ sáu chữ số đã cho.

Trả lời: 60

Lời giải:

Gọi số cần lập có dạng: $\overline{abc}$.

Chọn c với $c \in \{4; 6; 8\}$: có 3 cách. Chọn $\overline{ab}$: có A_5^2 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $3 \cdot A_5^2 = 60$ số tự nhiên thỏa mãn.

Câu 31. Có bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số, sao cho mỗi số đó, chữ số đứng sau lớn hơn chữ số chữ số đứng trước?

Trả lời: 126

Lời giải:

Vì chữ số đầu tiên của số tự nhiên phải khác 0, các chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước nên số 0 không thể xuất hiện trong số tự nhiên cần lập.

Xét dãy các số đã được sắp thứ tự là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Mỗi cách lấy 5 chữ số từ 9 chữ số này (không thay đổi thứ tự) sẽ cho ra số tự nhiên thỏa mãn đề bài, vậy ta có $C_9^5 = 126$ số tự nhiên thỏa mãn.

Câu 32. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số được chọn từ 1, 2, 3, 4, 5 sao cho chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có mặt đúng ba lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần?

Trả lời: 1260

Lời giải:

Xét bảy ô tương ứng với bảy chữ số của số tự nhiên cần lập.

Chọn hai từ bảy vị trí để đặt chữ số 2 : có C_7^2 (cách).

Chọn ba từ năm vị trí còn lại để đặt chữ số 3: có C_5^3 (cách).

Chọn hai chữ số từ $\{1; 4; 5\}$ rồi xếp vào hai vị trí cuối: A_3^2 (cách).

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn là $C_7^2 C_5^3 A_3^2 = 1260$.

Câu 33. Tìm tất cả nghiệm thực của phương trình $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$.

Trả lời: $S = \{5; 11\}$

Lời giải:

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}, x \geq 10$.

$$\text{Ta có: } A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!} + \frac{x!}{(x-9)!} = 9 \cdot \frac{x!}{(x-8)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-10)!} + \frac{1}{(x-9)!} = 9 \cdot \frac{1}{(x-8)!} \Leftrightarrow \frac{(x-8)!}{(x-10)!} + \frac{(x-8)!}{(x-9)!} = 9 \cdot \frac{(x-8)!}{(x-8)!}$$

$$\Leftrightarrow (x-8)(x-9) + (x-8) = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ x=5 \end{cases} \text{ (tm).}$$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{5; 11\}$.

Câu 34. Giải bất phương trình $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 - 20 < 0$.

Trả lời: $S = \{2\}$

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

$$\text{Ta có: } 2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 - 20 < 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 3 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} - 20 < 0$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) + 3(n-1)n - 20 < 0 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 10 < 0 \Leftrightarrow -2 < n < \frac{5}{2}.$$

Vì $n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow n = 2$. Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = \{2\}$.

Câu 35. Giải phương trình $P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$.

Trả lời: $S = \{3; 4\}$

Lời giải:

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$.

$$\text{Ta có: } P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x) \Leftrightarrow A_x^2(P_x - 6) - 12(P_x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (P_x - 6)(A_x^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_x = 6 \\ A_x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x! = 6 \\ x(x-1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \\ x=-3 \end{cases}.$$

Do điều kiện, ta loại $x = -3$. Tập nghiệm phương trình là $S = \{3; 4\}$.

Câu 36. Từ tập $X = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau?

Trả lời: 60

Lời giải

Số các số tự nhiên có ba chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau được lập từ tập X là số chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử $\Rightarrow$ số các số cần lập là $A_5^3 = 60$ (số).

Câu 37. Từ các số 0,1,2,7,8,9 tạo được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

Trả lời: 312

Lời giải

Gọi $\overline{abcde}$ là số cần tìm.

Nếu $e = 0$, chọn 4 trong 5 số còn lại sắp vào các vị trí a, b, c, d có $A_5^4 = 120$ cách,

Nếu $e \neq 0$, chọn e có 2 cách,

Chọn $a \neq 0$ và $a \neq e$ có 4 cách,

Chọn 3 trong 4 số còn lại sắp vào các vị trí b, c, d có A_4^3 cách.

Như vậy có: $A_5^4 + 2 \cdot 4 \cdot A_4^3 = 312$ số.

Câu 38. Từ các số 0,1,2,7,8,9 tạo được bao nhiêu số lẻ có 5 chữ số khác nhau?

Trả lời: 288

Lời giải

Gọi $\overline{abcde}$ là số cần tìm.

Chọn e có 3 cách,

Chọn $a \neq 0$ và $a \neq e$ có 4 cách,

Chọn 3 trong 4 số còn lại sắp vào b, c, d có A_4^3 cách.

Vậy có $3 \cdot 4 \cdot A_4^3 = 288$ số.

Câu 39. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó chứa các chữ số 3,4,5 và chữ số 4 đứng cạnh chữ số 3 và chữ số 5?

Trả lời: 1500

Lời giải

Giả sử mỗi số thỏa mãn yêu cầu bài toán có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$.

Ta thấy các chữ số 3,4,5 luôn đứng cạnh nhau và chữ số 4 đứng giữa hai chữ số còn lại,

Trường hợp 1: $a_2 = 4$, ta có: $2! \cdot A_7^3 = 420$ số.

Trường hợp 2: $a_3 = 4$ hoặc $a_4 = 4$ hoặc $a_5 = 4$ có $3 \cdot 2! \cdot 6 \cdot A_6^2 = 1080$ số.

Vậy có $420 + 1080 = 1500$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số dạng $\overline{abc}$ với $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ sao cho $a < b < c$.

Trả lời: 20

Lời giải

Ví số tự nhiên có ba chữ số dạng $\overline{abc}$ với $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ sao cho $a < b < c$ nên $a, b, c \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Suy ra số các số có dạng $\overline{abc}$ là $C_6^3 = 20$.

Câu 41. Các số tự nhiên có 7 chữ số từ các chữ số 1; 2; 3; 4. Tính xác suất để số lập được thỏa mãn: các chữ số 1; 2; 3 có mặt hai lần, chữ số 4 có mặt 1 lần đồng thời các chữ số lẻ đều nằm ở các vị trí lẻ (tính từ trái qua phải).

Trả lời: $\frac{9}{8192}$

Lời giải

Ta có: $n(\Omega) = 4^7$.

Chọn 2 trong 4 vị trí lẻ cho số 1 có C_4^2 cách, 2 vị trí còn lại cho số 3,

Chọn 1 trong 3 vị trí chẵn cho số 4 có 3 cách, 2 vị trí còn lại cho số 2.

Vậy $P = \frac{3 \cdot C_4^2}{4^7} = \frac{9}{8192}$.

Câu 42. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm tám chữ số sao cho trong mỗi số đó có đúng ba chữ số 1, các chữ số còn lại đôi một khác nhau và hai chữ số chẵn không đứng cạnh nhau?

Trả lời: 2400

Lời giải

Bước 1: ta xếp các số lẻ: có các số lẻ là 1, 1, 1, 3, 5 vậy có $\frac{5!}{3!}$ cách xếp.

Bước 2: ta xếp 3 số chẵn 2, 4, 6 xen kẽ 5 số lẻ trên có 6 vị trí để xếp 3 số vậy có A_6^3 cách xếp.

Vậy có $\frac{5!}{3!} \cdot A_6^3 = 2400$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43. Có bao nhiêu số tự nhiên có tám chữ số trong đó có ba chữ số 0, không có hai chữ số 0 nào đứng cạnh nhau và các chữ số khác chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần.

Trả lời: 151200

Lời giải

Chọn ra 5 chữ số khác 0 trong 9 chữ số (từ 1 đến 9) và sắp xếp chúng theo thứ tự có A_9^5 cách,

Để hai chữ số 0 không đứng cạnh nhau ta có 6 vị trí để xếp (do 5 chữ số vừa chọn tạo ra 6 vị trí), Do chữ số 0 không thể xếp ở đầu nên còn 5 vị trí để xếp số 0, Khi đó xếp 3 số 0 vào 5 vị trí nên có C_5^3 cách.

Vậy có $A_9^5 C_5^3 = 151200$ số cần tìm.

Câu 44. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số mà tổng các chữ số trong mỗi số là 3.

Trả lời: 15

Lời giải

Tổng 5 chữ số bằng 3 thì tập hợp các số đó có thể là $\{0;1;2\}, \{1;1;1\}, \{3;0\}$.

TH1: số có 5 chữ số gồm 3 chữ số 0, 1 chữ số 1 và 1 chữ số 2.

Chọn chữ số xếp vào vị trí đầu có 2 cách, xếp chữ số còn lại vào 4 vị trí cuối có 4 cách nên có: $2 \cdot 4 = 8$ (số).

TH2: số có 5 chữ số gồm 3 chữ số 1, 2 chữ số 0 có 6 số.

Xếp số 1 vào vị trí đầu có 1 cách, 2 số 1 còn lại vào 4 vị trí cuối có C_4^2 cách nên có: $C_4^2 = 6$ (số).

TH3: số có 5 chữ số gồm 1 chữ số 3, 4 chữ số 0 có 1 số.

Vậy có $8+6+1=15$ số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 45. Ngân hàng đề thi gồm 15 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 8 câu hỏi tự luận khác nhau. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi sao cho mỗi đề thi gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 4 câu hỏi tự luận khác nhau.

Trả lời: $C_{15}^{10} \cdot C_8^4$

Lời giải

Để lập được được một đề thi gồm 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau và 4 câu hỏi tự luận khác nhau ta thực hiện qua 2 giai đoạn.

Giai đoạn 1: Chọn 10 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau từ 15 câu hỏi trắc nghiệm khác nhau có C_{15}^{10} cách chọn.

Giai đoạn 2: Chọn 4 câu hỏi tự luận khác nhau từ 8 câu hỏi tự luận khác nhau có C_8^4 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $C_{15}^{10} \cdot C_8^4$ cách lập đề thi.

Câu 46. Từ các chữ số 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt 2 lần, chữ số 3 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 4 lần?

Trả lời: 1260

Lời giải

Cách 1: dùng tổ hợp

Chọn vị trí cho 2 chữ số 2 có C_9^2 cách.

Chọn vị trí cho 3 chữ số 3 có C_7^3 cách.

Chọn vị trí cho 4 chữ số 4 có C_4^4 cách.

Vậy số các số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán là $C_9^2 C_7^3 C_4^4 = 1260$ số.

Cách 2: dùng hoán vị lặp

Số các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\frac{9!}{2!3!4!} = 1260$ số.

Câu 47. Có bao nhiêu cách chia một nhóm 6 người thành 4 nhóm nhỏ, trong đó có hai nhóm 2 người và hai nhóm 1 người?

Trả lời: 45

Lời giải

Chọn một nhóm 2 người, có C_6^2 cách chọn.

Chọn nhóm thứ hai có 2 người, có C_4^2 cách chọn.

Hai nhóm còn lại có: 2 cách chia.

Số cách chia 6 người thành 4 nhóm nhỏ, trong đó có hai nhóm 2 người và hai nhóm 1 người là:
 $\frac{C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 45$ cách. (do trùng ở hai nhóm 2 người và hai nhóm 1 người).

Câu 48. Đội thanh niên xung kích có của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong ba lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Trả lời: 372

Lời giải

TH1: 4 học sinh được chọn thuộc một lớp:

A: có $C_5^4 = 5$ cách chọn,

B: có $C_4^4 = 1$ cách chọn,

Trường hợp này có: 6 cách chọn.

TH2: 4 học sinh được chọn thuộc hai lớp:

A và B : có $C_9^4 - (C_5^4 + C_4^4) = 120$,

B và C : có $C_7^4 - C_4^4 = 125$,

C và A : có $C_7^4 - C_5^4 = 121$,

Trường hợp này có 366 cách chọn.

Vậy có 372 cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 49. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ.

Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

Trả lời: 207900

Lời giải

Tỉnh 1 có: $C_{12}^4 \cdot C_3^1$ (cách).

Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì: Tỉnh 2 có: $C_8^4 \cdot C_2^1$ (cách).

Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất và tỉnh thứ hai thì có: Tỉnh 3 có $C_4^4 \cdot C_1^1$ (cách).

Vậy số cách phân công thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$C_{12}^4 C_3^1 \cdot C_8^4 C_2^1 \cdot C_4^4 C_1^1 = 207900.$$

Câu 50. Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

Trả lời: 7

Lời giải

Giả sử đa giác có n cạnh ($n \geq 3$). Suy ra: số đường chéo là $C_n^2 - n$,

$$\text{Ta có: } C_n^2 - n = 2n \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 3n \Leftrightarrow n-1=6 \Leftrightarrow n=7.$$

Câu 51. Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 nữ sinh, 3 nam sinh thành một hàng dọc sao cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ:

Trả lời: 72

Lời giải

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Nam sắp xếp vào số lẻ: $3!$,

Nữ sắp xếp vào số chẵn: $3!$,

Hai nhóm nam và nữ đổi chỗ (nam vào số chẵn, nữ vào số lẻ): $2!$, Vậy: $3!.3!.2!=72$.

Câu 52. Có bao nhiêu cách chia hết 4 đồ vật khác nhau cho 3 người, biết rằng mỗi người nhận được ít nhất 1 đồ vật.

Trả lời: 36

Lời giải

Có hai người mà mỗi người nhận một đồ vật và một người nhận hai đồ vật, Chọn hai người để mỗi người nhận một đồ vật: có C_3^2 cách chọn,

Chọn hai đồ vật trao cho hai người: có A_4^2 cách chọn,

Hai đồ vật còn lại trao cho người cuối cùng.

Vậy số cách chia là: $C_3^2 \cdot A_4^2 = 36$ cách.

Câu 53. Ông và Bà An cùng có 6 đứa con đang lên máy bay theo một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp hàng khác nhau nếu ông An hay bà An đứng ở đầu hoặc cuối hàng:

Trả lời: 18720

Lời giải

Ta dùng phân bù.

Sắp 8 người vào 8 vị trí theo hàng dọc có $8!$ cách sắp xếp,

Sắp ông và bà An vào 2 trong 6 vị trí (trừ vị trí đầu và cuối hàng) có A_6^2 cách.

Sắp 6 người con vào 6 vị trí còn lại có $6!$ cách.

Vậy có $8! - A_6^2 \cdot 6! = 18720$ cách sắp xếp.

Câu 54. Trong một giải cờ vua gồm nam và nữ vận động viên. Mỗi vận động viên phải chơi hai ván với mỗi động viên còn lại. Cho biết có 2 vận động viên nữ và cho biết số ván các vận động viên chơi nam chơi với nhau hơn số ván họ chơi với hai vận động viên nữ là 84. Hỏi số ván tất cả các vận động viên đã chơi?

Trả lời: 182

Lời giải

Gọi số vận động viên nam là n ,

Số ván các vận động viên nam chơi với nhau là $2.C_n^2 = n(n-1)$,

Số ván các vận động viên nam chơi với các vận động viên nữ là $2.2.n = 4n$. Vậy ta có $n(n-1) - 4n = 84 \Rightarrow n = 12$.

Vậy số ván các vận động viên chơi là $2C_{14}^2 = 182$.

Câu 55. Cho đa giác đều có n cạnh ($n \geq 4$). Tìm n để đa giác có số đường chéo bằng số cạnh ?

Trả lời: 5

Lời giải

Tổng số đường chéo và cạnh của đa giác là : $C_n^2 \Rightarrow$ Số đường chéo của đa giác là $C_n^2 - n$,

Ta có: Số đường chéo bằng số cạnh

$$\Leftrightarrow C_n^2 - n = n \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 2n \Leftrightarrow n(n-1) = 4n \Leftrightarrow n-1 = 4 \Leftrightarrow n = 5.$$

Câu 56. Trên mặt phẳng có 2017 đường thẳng song song với nhau và 2018 đường thẳng song song khác cùng cắt nhóm 2017 đường thẳng đó. Số hình bình hành nhiều nhất có thể được tạo thành có đỉnh là các giao điểm nói trên bằng

Trả lời: $C_{2017}^2 C_{2018}^2$

Lời giải

Số cách chọn 2 đường thẳng trong 2017 đường thẳng song song với nhau là C_{2017}^2 ,

Số cách chọn 2 đường thẳng trong 2018 đường thẳng song song khác cùng cắt nhóm 2017 đường thẳng đó là C_{2018}^2 ,

Số hình bình hành nhiều nhất có thể được tạo thành có đỉnh là các giao điểm nói trên bằng: $C_{2017}^2 C_{2018}^2$.

Câu 57. Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in N$ và $n \geq 3$. Tìm $\begin{cases} n \in N \\ n \geq 2 \end{cases}$ biết rằng đa giác đã cho có

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)n}{2} > \frac{10}{3} n \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow 2 \leq n \leq 5 \text{ đường chéo.}$$

Trả lời: 18

Lời giải

+ Tìm công thức tính số đường chéo: Số đoạn thẳng tạo bởi n đỉnh là C_n^2 , trong đó có $\begin{cases} n \in N \\ n \geq 2 \end{cases}$ cạnh, suy ra số đường chéo là $\Leftrightarrow (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2} < 14(n+1) \Leftrightarrow 2n^2 - n - 28 < 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < n < 4$.

+ Đa giác đã cho có $2 \leq n < 4$ đường chéo nên n .

+ Giải phương trình: $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{143}{4P_n} \Leftrightarrow (n-1)n - 2n = 270$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 270 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 18(N) \\ n = -15(L) \end{cases} \Leftrightarrow n = 18.$$

Câu 58. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên đường thẳng d_1 lấy 10 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 25 vừa nói trên.

Trả lời: $C_{10}^2 C_{15}^1 + C_{10}^1 C_{15}^2$

Lời giải

Số tam giác lập được thuộc vào một trong hai loại sau:

Loại 1: Gồm hai đỉnh thuộc vào d_1 và một đỉnh thuộc vào d_2 .

Số cách chọn bộ hai điểm trong 10 thuộc d_1 : C_{10}^2 ,

Số cách chọn một điểm trong 15 điểm thuộc d_2 : C_{15}^1 ,

Loại này có: $C_{10}^2 \cdot C_{15}^1 = \text{tam giác}$.

Loại 2: Gồm một đỉnh thuộc vào d_1 và hai đỉnh thuộc vào d_2 .

Số cách chọn một điểm trong 10 thuộc d_1 : C_{10}^1 ,

Số cách chọn bộ hai điểm trong 15 điểm thuộc d_2 : C_{15}^2 ,

Loại này có: $C_{10}^1 \cdot C_{15}^2 = \text{tam giác}$.

Vậy có tất cả: $C_{10}^2 C_{15}^1 + C_{10}^1 C_{15}^2$ tam giác thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 59. Nếu $A_x^2 = 110$ tìm x ?

Trả lời: $x = 11$

Lời giải

Điều kiện: $x \in N, x \geq 2$.

$$\text{Ta có: } A_x^2 = 110 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!} = 110 \Leftrightarrow x(x-1) = 110 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = -10 \end{cases}.$$

So sánh điều kiện ta nhận $x = 11$.

Câu 60. Cho $C_n^{n-3} = 1140$. Tính $A = \frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$.

Trả lời: 256

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} n \in N \\ n \geq 6 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } C_n^{n-3} = 1140 \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 1140 \Leftrightarrow n = 20.$$

$$\text{Khi đó: } A = \frac{n(n-1)\dots(n-5) + n(n-1)\dots(n-4)}{n(n-1)\dots(n-3)} = n - 4 + (n-4)(n-5) = 256.$$

Câu 61. Nghiệm của phương trình $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$ là:

Trả lời: $x = 11$.

Lời giải

Điều kiện: $10 \leq x \in N$.

$$\begin{aligned} A_x^{10} + A_x^9 &= 9A_x^8 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!} + \frac{x!}{(x-9)!} = 9 \cdot \frac{x!}{(x-8)!} \\ \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!} + \frac{x!}{(x-9)(x-10)!} &= 9 \cdot \frac{x!}{(x-8)(x-9)(x-10)!} \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{(x-9)} - \frac{9}{(x-8)(x-9)} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{(x-9)} - \frac{9}{(x-8)(x-9)} &= 0 \\ \left(\text{do } \frac{x!}{(x-10)!} \neq 0 \right) &\Leftrightarrow x = 11. \end{aligned}$$

Câu 62. Cho số tự nhiên n thỏa mãn $3C_{n+1}^3 - 3A_n^2 = 52(n-1)$. Tìm n

Trả lời: $n = 13$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} n \in N \\ n \geq 2 \end{cases}$.

Ta có $3C_{n+1}^3 - 3A_n^2 = 52(n-1) \Leftrightarrow 3 \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} - 3 \frac{n!}{(n-2)!} = 52(n-1)$.

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)n(n-1)}{2} - 3n(n-1) = 52(n-1) \Leftrightarrow (n+1)n - 6n = 104$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 5n - 104 = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} n = 13 \text{ (tm)} \\ n = -8 \text{ (l)} \end{cases}. \text{ Vậy } n = 13.$$

Câu 63. Cho các số tự nhiên m, n thỏa mãn đồng thời các điều kiện $C_m^2 = 153$ và $C_m^n = C_m^{n+2}$. Khi đó $m+n$ bằng:

Trả lời: 26

Lời giải

Theo tính chất $C_m^n = C_m^{m-n}$ nên từ $C_m^n = C_m^{n+2}$ suy ra $2n+2=m$.

$$C_m^2 = 153 \Leftrightarrow \frac{m(m-1)}{2} = 153 \Rightarrow m = 18. \text{ Do đó } n = 8.$$

Vậy $m+n=26$.

Câu 64. Tính giá trị $M = A_{n-15}^2 + 3A_{n-14}^3$, biết rằng $C_n^4 = 20C_n^2$ (với n là số nguyên dương, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử và C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Trả lời: 78

Lời giải

Điều kiện $n \geq 4, n \in N$, ta có $C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = 20 \frac{n!}{2!(n-2)!}$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n-3) = 240 \Rightarrow \begin{cases} n = 18 \\ n = -13 \end{cases} \Rightarrow n = 18. \text{ Vậy } M = A_3^2 + 3A_4^3 = 78.$$

Câu 65. Tổng của tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{1}{C_n^1} - \frac{1}{C_{n+1}^2} = \frac{7}{6C_{n+4}^1}$ là:

Trả lời: 11

Lời giải

Điều kiện: $n \geq 1, n \in N$.

$$\frac{1}{C_n^1} - \frac{1}{C_{n+1}^2} = \frac{7}{6C_{n+4}^1} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!}} - \frac{1}{\frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot 2!}} = \frac{7}{6 \cdot \frac{(n+4)!}{(n+3)! \cdot 1!}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{7}{6 \cdot (n+4)}$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 11n + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = 8 \end{cases}.$$

Vậy Tổng của tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{1}{C_n^1} - \frac{1}{C_{n+1}^2} = \frac{7}{6C_{n+4}^1}$ là: $3+8=11$.

Câu 66. Tìm số nguyên dương n sao cho: $P_{n-1} \cdot A_{n+4}^4 < 15P_{n+2}$.

Trả lời: $n = 3, 4, 5$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} n \in N \\ n \geq 1 \end{cases}$.

Ta có: $P_{n-1} \cdot A_{n+4}^4 < 15P_{n+2} \Leftrightarrow (n-1)! \frac{(n+4)!}{n!} < 15(n+2)!$
 $\Leftrightarrow \frac{(n+4)(n+3)}{n} < 15 \Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6 \Rightarrow n = 3, 4, 5$.

Câu 67. Giải bất phương trình (ẩn n thuộc tập số tự nhiên) $C_{n+2}^{n-1} + C_{n+2}^n > \frac{5}{2}A_n^2$.

Trả lời: $n \geq 2, n \in N$

Lời giải

Với $n \geq 2, n \in N$ ta có:

$C_{n+2}^{n-1} + C_{n+2}^n > \frac{5}{2}A_n^2 \Leftrightarrow C_{n+3}^n > \frac{5}{2}A_n^2 \Leftrightarrow \frac{(n+3)!}{n!3!} > \frac{5}{2} \frac{n!}{(n-2)!}$
 $\Leftrightarrow n(n^2 - 9n + 26) + 6 > 0$ luôn đúng với mọi $n \geq 2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình $n \geq 2, n \in N$.

Câu 68. Giải bất phương trình (ẩn n thuộc tập số tự nhiên) $(n!)^3 C_n^n \cdot C_{2n}^n \cdot C_{3n}^n \leq 720$.

Trả lời: $n = 0, 1, 2$

Lời giải

Điều kiện $n \in N, n \geq 0$.

Với điều kiện đó bất phương trình tương đương:

$(n!)^3 \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{(3n)!}{(2n)!n!} \leq 720 \Leftrightarrow (3n)! \leq 720$.

Ta thấy $(3n)!$ tăng theo n và mặt khác $6! = 720 \geq (3n)!$

Suy ra bất phương trình có nghiệm $n = 0, 1, 2$.

Câu 69. Giải bất phương trình (ẩn n thuộc tập số tự nhiên) $A_{n+1}^3 + C_{n+1}^{n-1} < 14(n+1)$.

Trả lời: $-\frac{7}{2} < n < 4$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2} < 14(n+1) \Leftrightarrow 2n^2 - n - 28 < 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < n < 4.$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là: $2 \leq n < 4$.

Câu 70. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 1725 tam giác có các đỉnh là ba trong số các điểm thuộc d_1 và d_2 nói trên. Tìm tổng các chữ số của n .

Trả lời: $n=15$

Lời giải

Ta thấy: Cứ một điểm bất kì trên đường thẳng d_1 với hai điểm phân biệt trên d_2 hoặc cứ một điểm bất kì trên đường thẳng d_2 với hai điểm phân biệt trên d_1 tạo thành một tam giác,

Vậy tổng số tam giác thỏa mãn đề bài là $10 \cdot C_n^2 + nC_{10}^2 = 1725$

$$\Leftrightarrow 5n(n-1) + 45n - 1725 = 0 \Leftrightarrow 5n^2 + 40n - 1725 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=15 \\ n=-23 \end{cases}. \text{ Vậy } n=15.$$

Câu 71. Trong không gian cho $2n$ điểm phân biệt ($n > 4, n \in \mathbb{N}$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và trong $2n$ điểm đó có đúng n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng và không có 4 điểm nào ngoài 4 điểm trong n điểm này đồng phẳng. Tìm n sao cho từ $2n$ điểm đã cho tạo ra đúng 201 mặt phẳng phân biệt.

Trả lời: $n=6$

Lời giải

Số cách chọn 3 điểm trong $2n$ điểm phân biệt đã cho là C_{2n}^3 , Số cách chọn 3 điểm trong n điểm cùng nằm trên một mặt phẳng là C_n^3 , Số mặt phẳng được tạo ra từ $2n$ điểm đã cho là $C_{2n}^3 - C_n^3 + 1$.

$$\text{Nhu vậy: } C_{2n}^3 - C_n^3 + 1 = 201 \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 200$$

$$\Leftrightarrow 7n^3 - 9n^2 + 2n - 1200 = 0 \Leftrightarrow (n-6)(7n^2 + 33n + 200) = 0 \Leftrightarrow n=6.$$

Câu 72. Cho x, y là nghiệm của hệ phương trình, $\begin{cases} A_y^x = 90 - 3C_y^x \\ 3A_y^x = 80 + 10C_y^x \end{cases}$. Tìm x và y ?

Trả lời: $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x, y \in N \\ y \geq x \geq 1 \end{cases}. \text{ Ta có: } \begin{cases} A_y^x = 90 - 3C_y^x \\ 3A_y^x = 80 + 10C_y^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_y^x = 60 \\ C_y^x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y!}{(y-x)!} = 60 \\ \frac{A_y^x}{C_y^x} = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(y-1)(y-2) = 60 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - 3y^2 + 2y - 60 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Câu 73. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên d_1 lấy 15 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 10 điểm phân biệt. Tính số tam giác mà có các đỉnh được chọn từ 25 điểm này.

Trả lời: 1725

Lời giải

Một tam giác được tạo nên bởi 3 điểm phân biệt không thẳng hàng.

Trường hợp 1: Tam giác có 2 điểm trên đường thứ nhất và 1 điểm trên đường thứ hai. Trường hợp này có: $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 = 1050$ (tam giác)

Trường hợp 2: Tam giác có 2 điểm trên đường thứ hai và 1 điểm trên đường thứ nhất. Trường hợp này có: $C_{15}^1 \cdot C_{10}^2 = 675$ (tam giác)

Vậy số tam giác được tạo thành là: $1050 + 675 = 1725$ (tam giác)

Câu 74. Từ các số 0,1,2,3,4,5,6,7,8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số sao cho luôn có mặt 3 số 0,1,2 và ba số này đứng cạnh nhau?

Trả lời: 480

Lời giải

Từ các số 0,1,2,3,4,5,6,7,8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau đôi một sao cho luôn có mặt 3 số 0,1,2 và ba số này đứng cạnh nhau?

Kí hiệu số cần lập là abcde.

Chọn 3 vị trí kề nhau từ 5 vị trí có: 3 (cách)

Xếp 3 số 0,1,2 vào từng bộ 3 vị trí kề nhau có: $3! = 6$ (cách)

Chọn 2 số từ 6 số còn lại và xếp vào 2 vị trí còn lại có: $A_6^2 = 30$ (cách)

Theo quy tắc nhân, số chữ số trong trường hợp này là: $3.6.30 = 540$ (số)

Trong số 540 số trên có cả những số có dạng 0 bcde. Lý luận tương tự như trên ta có: $1.2!.A_6^2 = 60$ số loại này.

Vậy số chữ số cần tìm là: $540 - 60 = 480$ (số).